

Ю. Г. Смирнов

**Математические методы
исследования задач электродинамики**

Монография

Пенза 2009

УДК 517.6 + 621.371
C50

Р е ц е н з е н т ы :

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией вычислительной электродинамики
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
A. С. Ильинский;

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики
Московского государственного института радиотехники,
электроники и автоматики (технического университета)
A. Б. Самохин

Смирнов, Ю. Г.
C50 **Математические методы исследования задач
электродинамики** : монография / Ю. Г. Смирнов. – Пенза :
Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009. – 268 с.

ISBN 978-5-94170-267-1

Представлены аналитические и численные методы исследования трехмерных векторных задач электродинамики. Рассматриваются как задачи дифракции электромагнитных волн на экранах и телах (задачи с правой частью), так и задачи распространения электромагнитных волн в волноведущих структурах (задачи на собственные значения). Изучаются методы псевдодифференциальных уравнений и объемных сингулярных интегральных уравнений, гибридный метод, метод операторных пучков, метод интегральных оператор-функций.

Для научных работников в области дифференциальных уравнений, математической физики и теории дифракции.

УДК 517.6 + 621.371

ISBN 978-5-94170-267-1 © ГОУ ВПО «Пензенский
государственный университет», 2009

*Моим родителям: Валентине Ивановне
и Геннадию Сергеевичу Смирновым*

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	8
Часть 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ.....	10
Глава 1. Метод псевдодифференциальных уравнений	10
Раздел 1. Метод псевдодифференциальных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на тонких ограниченных экранах	14
§1 Постановка задачи дифракции.	
Теорема единственности	17
§2 Пространства W и W' сечений векторных расслоений над Ω	19
§3 Представление решений и система интегродифференциальных уравнений на экранах	23
§4 Сведение задачи к векторному псевдодифференциальному уравнению на Ω	26
§5 Теоремы о фредгольмовости и разрешимости векторного псевдодифференциального уравнения	33
§6 Гладкость обобщенных решений. Порядок сингулярности решений в окрестности угловых точек	37
§7 Принцип предельного поглощения	39
Раздел 2. Сходимость методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и решение уравнения электрического поля	41
§1 Теоремы о сходимости методов Галеркина.....	42
§2 Сходимость метода Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах.....	44
§3 Метод Галеркина для уравнения электрического поля	47
§4 Свойство аппроксимации подпространств базисных функций Рао-Уилтона-Глиссона.....	49
§5 Метод Галеркина с безроторными и бездивергентными базисными функциями.....	55

Глава 2. Метод объемных сингулярных интегральных уравнений.....	57
Раздел 1. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в резонаторе	
§1 Краевая задача для системы уравнений Максвелла.....	58
§2 Тензорная функция Грина прямоугольного резонатора ..	62
§3 Объемное сингулярное интегральное уравнение.....	64
§4 Метод Галеркина.....	67
Раздел 2. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в слое	
§1 Краевая задача дифракции	71
§2 Тензорная функция Грина слоя	73
§3 Объемное сингулярное интегральное уравнение.....	75
§4 Метод Галеркина.....	77
Раздел 3. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе	
§1 Краевая задача дифракции для системы уравнений Максвелла	81
§2 Тензорная функция Грина прямоугольного волновода...	82
§3 Объемное сингулярное интегральное уравнение.....	85
§4 Метод Галеркина.....	86
	88
Глава 3. Гибридный метод.....	93
§1. Гибридный метод для электромагнитной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла	94
§2 Гибридный метод и эллиптичность задачи дифракции для векторного уравнения Гельмгольца.....	98
Часть 2. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.....	113
Глава 1. Метод операторных пучков	116
Раздел 1. Задача о распространении нормальных волн в волноведущих структурах	
§1 Задача о нормальных волнах волноведущей структуры.....	118
§2 Задача о спектре операторного пучка четвертого порядка	119
	127

§3 Свойства спектра пучка $L(\gamma)$	132
§4 Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$	141
Раздел 2. Свойства системы собственных и присоединенных волн волноведущей структуры	
§1 Собственные и присоединенные волны.....	154
§2 Полнота системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн	160
§3 Свойства ортогональности для собственных и присоединенных волн.....	168
§4 О базисности системы собственных и присоединенных волн.....	170
Глава 2. Метод оператор-функций.....	175
Раздел 1. Интегральные оператор-функции, отвечающие задаче о нормальных волнах волноведущей структуры.....	
§1 Интегральная оператор-функция, отвечающая краевой задаче на собственные значения. Теорема эквивалентности	175
§2 Некоторые свойства функций Грина и интегралов типа потенциалов	179
§3 Эквивалентность краевой задачи и системы интегральных уравнений.....	185
Раздел 2. Метод вычисления характеристических чисел и собственных векторов L-оператор-функций.....	
§1 Классы Φ_p . Логарифмические интегральные операторы в классах Φ_p	190
§2 Компактные операторы в пространствах Φ_p	194
§3 Метод вычисления характеристических чисел и собственных векторов L -оператор-функций. Теорема сходимости.....	198
§4 Системы L -оператор-функций.....	201
§5 Метод вычисления характеристических чисел и собственных векторов в задаче о нормальных волнах волноведущей структуры	204

Раздел 3. Свойства спектра волноведущей структуры – щелевой линии передачи.....	208
§1 Интегральные оператор-функции для щелевой линии передачи. Четные и нечетные волны	208
§2 Свойства спектра щелевой линии передачи	213
Глава 3. Методы решения нелинейных краевых задач на собственные значения	216
 Раздел 1. Задача о распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой	216
§1 Постановка задачи	217
§2 Нелинейное интегральное уравнение	220
§3 Итерационный метод.....	227
§4 Существование решений дисперсионного уравнения... <td>227</td>	227
§5 Численный метод	230
 Раздел 2. Задача о распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, заполненном нелинейной средой	231
§1 Постановка задачи	232
§2 Решение системы дифференциальных уравнений	234
§3 Границные условия и дисперсионное уравнение.....	236
§4 Краевая задача и теоремы существования.....	241
§5 Предельный переход к случаю линейной среды в слое	245
§6 Первое приближение для собственных значений задачи	246
Список литературы	253

Предисловие

В монографии излагаются современные методы исследования трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах и магнитодиэлектрических телах и задач о распространении электромагнитных волн в сложных волноведущих структурах с неоднородным заполнением в линейных и нелинейных средах, которые разрабатывались автором на протяжении последних лет.

Рассматриваются следующие математические методы исследования задач электродинамики:

- 1) метод псевдодифференциальных уравнений;
- 2) метод объемных сингулярных интегральных уравнений;
- 3) гибридный метод для решения краевых задач дифракции на экранах и телах;
- 4) метод операторных пучков;
- 5) метод интегральных оператор-функций для решения нелинейных задач на собственные значения о распространении электромагнитных волн в сложных волноведущих структурах с неоднородным заполнением;
- 6) метод интегральных дисперсионных соотношений для исследования нелинейных задач на собственные значения о распространении электромагнитных волн в нелинейных средах.

Несмотря на то, что перечисленные методы разрабатываются для решения задач электродинамики сравнительно давно и опубликовано большое число статей в научных журналах, они не получили до сих пор широкого распространения и их использование остается уделом узких специалистов. Одна из причин этого обстоятельства, возможно, заключается в том, что изложение методов «разбросано» по многим работам в различных журналах и нет книги, в которой эти методы были бы сведены воедино. Устранение этого пробела и является целью данной монографии.

Автор не ставил своей целью описать наиболее известные методы решения задач электродинамики (а также выполнить сравнение различных методов). Например, такие широко распространенные численные методы, как конечно-разностный и метод конечных элементов, не рассматриваются в данной книге. Описанию и применению этих методов посвящено много монографий.

Общим для всех рассматриваемых в монографии методов является сведение исходной задачи к интегральному (или интегро-дифференциальному) уравнению, или интегральному соотношению. В этом смысле можно говорить, что все эти методы относятся к классу методов интегральных уравнений.

Существенной особенностью монографии является рассмотрение задач в строгой математической постановке как краевых задач для системы уравнений Максвелла. Все методы демонстрируются на исследовании конкретных сложных задач электродинамики. Методы применяются для получения как аналитических, так и численных результатов. Во всех задачах указанными методами получены основные результаты о фредгольмовости и разрешимости краевых задач, о существовании и локализации собственных значений для задач о распространении волн, о сходимости численных методов.

Монография состоит из двух частей, посвященных исследованию краевых задач дифракции (задачи с правой частью) и (нелинейных) задач на собственные значения. Каждая часть содержит по три главы, а каждая глава – несколько разделов (разделенных на параграфы). Структура монографии фактически позволяет читать каждый раздел независимо от других разделов. В каждом разделе принята сквозная нумерация формул. Если ссылка дается на формулу из другого раздела этой главы, то перед номером формулы добавляется номер соответствующего раздела, а если формула содержится в другой главе, то дополнительно указывается и номер соответствующей главы. Аналогично нумеруются определения, теоремы, леммы и т.д.

Монография рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов, специализирующихся в области исследования задач электродинамики, а также математического моделирования процессов дифракции и распространения электромагнитных волн.

Автор надеется, что изучение методов, представленных в данной монографии, расширит математический кругозор исследователей в области электродинамики, и, возможно, позволит решить новые сложные задачи.

Ю. Смирнов

Часть 1

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Глава 1. Метод псевдодифференциальных уравнений

Настоящая глава посвящена применению метода псевдодифференциальных уравнений для аналитического и численного исследования векторных задач дифракции стороннего электромагнитного поля на идеально проводящих тонких экранах. Эти задачи являются, по существу, классическими в электродинамике. Традиционная (физическая) теория дифракции создавалась на протяжении нескольких столетий Х. Гюйгенсом (1690), О. Френелем (1818), Г. Гельмгольцем (1859), Г. Р. Кирхгофом (1882), Д. Лармором (1903) и другими авторами. Однако благодаря работам А. Пуанкаре (1892) и А. Зоммерфельда (1896) стало ясно, что в задачах дифракции электромагнитных волн речь идет о некоторой краевой задаче математической физики. В общей постановке задача состоит в нахождении решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих определенным краевым условиям. К этому надо добавить «условия излучения» (Зоммерфельд, 1912), состоящие в том, что вся энергия, излучаемая источником, должна уходить в бесконечность. Кроме того, следует учитывать особое поведение полей в окрестности края поверхности тонкого экрана. Первое аналитическое решение задачи дифракции на идеально проводящей полуплоскости было дано Зоммерфельдом [48]. Уже это решение позволило сделать ряд важных выводов о поведении электромагнитного поля в ближней и дальней зоне, об особенностях полей в окрестности края тонкого экрана, о поведении полей на бесконечности и т.д.

Наиболее естественный подход к решению задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем тонком ограниченном экране – сведение ее к векторному интегралу интегральному уравнению на экране [191]. Такой подход часто называют методом поверхностных токов. Идея метода поверхностных токов принадлежит А. Пуанкаре (в акустических (скалярных) задачах этот метод разрабатывался Релеем (1897)). Впервые векторное интег-

родифференциальное уравнение на экране было получено А. Мауэ в 1949 г. [19]. В наших обозначениях это уравнение имеет вид

$$Lu := \operatorname{grad}_\tau A(\operatorname{div} u) + k^2 A_\tau u = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где div – операция «поверхностной» дивергенции; A – интегральный оператор,

$$Au = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds; \quad (2)$$

u – касательное к поверхности экрана Ω векторное поле (плотность поверхностного тока). Индекс τ показывает взятие касательных компонент к Ω соответствующего поля.

Центральной проблемой при исследовании разрешимости уравнения (1) является выбор пространств для решений и для правых частей таким образом, чтобы обеспечить фредгольмовость (и, если удастся, однозначную разрешимость) этого уравнения в выбранных пространствах. Кроме того, пространство решений должно быть достаточно широким и содержать все физически допустимые поля.

Изучение уравнения (1) было начато уже в работе А. Мауэ [19]. Позднее в фундаментальной монографии [191] была доказана теорема единственности для решений уравнения (1) (и краевой задачи дифракции), исследовано поведение дифракционных полей на бесконечности и в окрестности гладкого края экрана, получены аналитические решения задач дифракции на тонком диске и на сфере. Интересно отметить, что в случае плоского экрана авторы записали уравнение (1), используя преобразование Фурье в виде уравнения, которое теперь называют псевдодифференциальным (сами авторы назвали его псевдоинтегральным).

Начиная с конца 1940-х гг., Я. Н. Фельдом была опубликована серия работ [188, 189], посвященных задаче дифракции на тонком экране. В этих работах предпринята попытка построения теории разрешимости краевой задачи дифракции в пространстве $L_1(\Omega)$ ($u \in L_1(\Omega)$). Выбрать в качестве пространства решений уравнения (1) «традиционное» пространство $L_2(\Omega)$ нельзя, поскольку оно является слишком узким и не содержит решений с требуемой особенностью в окрестности края экрана (особенность известна, например, из аналитического решения задачи дифракции на полуплоскости). В работах Я. Н. Фельда выбор пространств согласован с поведением полей в окрестности ребра, однако нет эффективного описания пространства образов оператора, определяемого левой частью уравнения (1).

Особый класс составляют задачи дифракции на поверхностях вращения. При осесимметричном возбуждении стороннего электромагнитного поля они приводят к одномерным уравнениям. При несимметричном возбуждении осевая симметрия учитывается посредством разложения в ряд Фурье по азимутной переменной решения и правой части уравнения (1). В результате подобной процедуры приходят к необходимости решения последовательности одномерных уравнений по образующей поверхности вращения. Аналитические исследования содержатся в работах [32, 69, 86, 88]. Однако анализ задач дифракции на поверхностях вращения в конце отличается от общего случая (дифракции на экране произвольной формы), поскольку изучаются, по существу, одномерные уравнения.

Г. А. Гринбергом [79, 80] для случая плоского экрана была предложена процедура перехода от векторного интегродифференциального уравнения (1) к векторному интегральному уравнению на экране. Метод включает в себя решение еще двух дополнительных краевых задач для уравнения Гельмгольца, причем одну из них – в общем виде [88]. С нашей точки зрения, такой прием не упрощает задачи. Отметим, что каких-либо выводов о разрешимости задачи дифракции на плоском экране не было сделано.

Существует два класса задач, наиболее близких к задачам дифракции электромагнитных волн на тонких экранах. Это (векторные) задачи дифракции электромагнитных волн на замкнутых идеально проводящих поверхностях и (скалярные) задачи дифракции акустических волн на незамкнутых поверхностях.

Первый класс задач отличается от рассматриваемых в настоящей работе задач тем, что изучается дифракция на замкнутых поверхностях. Векторный характер задач сохраняется, исследуются краевые задачи для системы уравнений Maxwella. Общая теория разрешимости электромагнитных задач дифракции на замкнутых поверхностях была построена уже к концу 1960-х гг. К. Мюллер [24] смог довести до определенной завершенности эту теорию, доказав теоремы существования и единственности. Благодаря этому теория дифракции электромагнитных волн на замкнутых поверхностях по своей внутренней замкнутости стала сравнимой с теорией потенциала. Современное изложение теории разрешимости для этого класса задач имеется в монографии Д. Колтона и Р. Кресса [110]. Доказательство разрешимости краевой задачи основано на сведении ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по поверхности и опирается на теорему о «скакаче» соответствующего векторного потенциала [110]. Уравнение рассматривается в классах Гель-

дера. К сожалению, эта техника не применима при исследовании задач дифракции на незамкнутых поверхностях, поскольку по теореме о «скачке» векторный потенциал будет принимать различные значения с разных сторон Ω , что противоречит непрерывности поля. Поэтому для незамкнутых поверхностей можно получить только уравнение первого рода (по традиционной терминологии). Уравнения первого рода на замкнутых поверхностях кратко рассматривались в [110], однако их разрешимость устанавливалась сведением к уже изученному уравнению Фредгольма второго рода.

Второй класс составляют задачи дифракции акустических волн на незамкнутых поверхностях. Несмотря на то, что эти задачи скалярные, в них проявляется специфика задач на многообразиях с краем. Теория разрешимости для этого круга задач была построена в работах [26, 27, 50, 51] (аналогичная теория для акустических задач дифракции на замкнутых поверхностях известна давно [117, 118]; ее современное изложение имеется в работах [6, 28, 157]). Основным инструментом, позволяющим добиться прогресса в изучении задач дифракции акустических волн на незамкнутых поверхностях, стала техника исследования псевдодифференциальных операторов (ПДО), действующих в пространствах Соболева.

К настоящему времени общая теория псевдодифференциальных операторов разработана достаточно полно и изложена в работах Ю. В. Егорова и М. А. Шубина [85, 195], М. Тейлора [184], С. Ремпеля и Б. Шульце [149] и других авторов. Первое систематическое использование этой теории в задачах дифракции, по-видимому, начали Э. Стефан и В. Вендланд [50]. Ими были рассмотрены двумерные скалярные задачи дифракции на тонких экранах и развита соответствующая теория разрешимости этих задач. Позднее Э. Стефан [51] обобщил результаты на случай ограниченных экранов в R^3 с гладким краем. Отметим, что в рамках теории ПДО для скалярных задач этот переход осуществляется сравнительно легко. Далее в работе [27] были рассмотрены экраны с угловыми точками и получены (численным методом) порядки сингULARности решений в окрестности этих точек, а также введены и описаны весовые классы Соболева для самих решений.

При решении задач дифракции на незамкнутых поверхностях мы будем использовать технику исследования ПДО на многообразиях с краем, действующих в сечениях векторных расслоений над Ω . При этом будут специально выбраны векторные пространства Соболева, отвечающие «физическим» требованиям задачи дифракции. Такой подход будем называть методом псевдодифференциальных уравнений.

Имеется еще ряд задач, которые также могут быть рассмотрены описываемым методом псевдодифференциальных уравнений. В частности, задача дифракции электромагнитного поля на отверстии в плоском, идеально проводящем экране. Эта задача является двойственной к тому же векторному интегродифференциальному уравнению (1). Задача дифракции на частично экранированном магнитодиэлектрическом слое отличается от предыдущей наличием магнитодиэлектрического заполнения и дополнительной экранирующей идеально проводящей плоскости в одном из полупространств. Задача обычно решается с помощью введения функций Грина слоя для уравнения Гельмгольца. Основной трудностью здесь является постановка условий на бесконечности. Эти условия были сформулированы А. Г. Свешниковым [158] и П. Вернером [23] и носят название парциальных условий излучения Свешникова-Вернера. Задача дифракции на частично экранированном слое также сводится к решению уравнения на отверстии. Еще одна задача дифракции – о связи через отверстие полупространства с прямоугольным полубесконечным волноводом. В этой задаче уже недостаточно использования одной скалярной функции Грина для представления решения в цилиндрической области. Используется представление решения с помощью двух функций Грина со смешанными граничными условиями. На бесконечности применяются условия излучения Свешникова.

Последние три задачи принадлежат классу задач о связи объемов через отверстие. Все они приводят к одному типу интегродифференциальных уравнений на отверстии. Теория разрешимости для этого круга задач также была построена методом псевдодифференциальных уравнений [12, 95].

Раздел 1. Метод псевдодифференциальных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на тонких ограниченных экранах

В данном разделе исследуется векторная задача дифракции стороннего электромагнитного поля на системе ограниченных идеально проводящих экранов произвольной формы Ω . Основная идея изучения задачи заключается в переходе к анализу некоторого псевдодифференциального оператора на Ω . Поверхность $\bar{\Omega}$ естественным образом рассматривается как подмногообразие с краем не-

которого объемлющего многообразия M с римановой метрикой. Используется техника исследования псевдодифференциальных операторов на многообразиях в пространствах Соболева сечений векторных расслоений, т.к. приходится иметь дело с пространствами касательных векторов, определенных в каждой точке поверхности, т.е. с касательным расслоением. Пространства решений и образов (W и W') состоят из сечений векторных расслоений над Ω . Для анализа дифференциальных и псевдодифференциальных операторов на Ω используется исчисление символов ПДО, действующих в сечениях векторных расслоений [140, 149].

В §1 рассматривается квазиклассическая постановка задачи дифракции. Она отличается от общепринятой тем, что в ней не конкретизируется поведение решений в окрестности ребер и угловых точек экрана, а ставится общее условие принадлежности рассеянного поля пространству $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ – условие конечности энергии в любом ограниченном объеме. Такой подход объясняется тем, что в дальнейшем будут изучаться обобщенные решения интегродифференциального уравнения на экране, и постановка дополнительных условий на «ребре» будет излишне сужать пространство решений. В то же время нет необходимости рассматривать обобщенные решения во всем пространстве \mathbb{R}^3 , т.к. без труда доказывается, что рассеянное поле будет гладким всюду вне экрана и непрерывным вплоть до поверхности экрана с каждой стороны, исключая точки его границы. Такая постановка позволяет избежать ненужных усложнений, связанных с обобщенными решениями, при построении и анализе векторных потенциалов. Приводится теорема единственности для задачи дифракции.

В §2 вводятся векторные пространства распределений W и W' , в которых будет изучаться интегродифференциальное уравнение на экране. Доказываются предложения, описывающие основные свойства этих пространств, наиболее важное из которых – разложение W в прямую сумму ортогональных подпространств W_1 и W_2 (для W' – W^1 и W^2), позволяющее в дальнейшем получить диагональное расщепление главной части ПДО и исследовать его свойства.

В §3 исследуется представление полей в виде векторного потенциала и выводится основное интегродифференциальное уравнение на экране. Решение задачи дифракции с помощью введения векторных потенциалов не только естественно и удобно с теоретической точки зрения, но и наиболее важно для приложений, поскольку именно этот путь чаще всего используется для получения практических численных результатов.

В §4 интегродифференциальное уравнение рассматривается как псевдодифференциальное (ПД). Особенностью этого уравнения является то, что главный (формально) матричный символ оказывается вырожденным, и поэтому изучение уравнения на декартовом произведении двух экземпляров некоторого пространства крайне неудобно. Обойти эту трудность удается, рассматривая уравнение на «несимметричном» пространстве W , согласованном с квадратичной формой псевдодифференциального оператора. Определяется обобщенное решение $u \in W$ ПД-уравнения.

Центральным является §5. Здесь производится диагональное расщепление главной части ПДО на подпространствах W_1 и W_2 . Этот момент является ключевым при анализе свойств оператора. При рассмотрении сужения ПДО на W_1 и W_2 выясняется структура полного символа оператора и доказывается фредгольмовость оператора с нулевым индексом в пространствах $W \rightarrow W'$. Значение этих результатов выходит далеко за рамки доказываемых ниже теорем о разрешимости уравнения. Знание структуры ПДО является очень важным при выборе численного метода решения ПД-уравнения, базисных и пробных функций в методе Галеркина, при анализе сходимости численного алгоритма и т.д.

Одним из приложений полученных результатов является выяснение вопроса о гладкости обобщенных решений при гладких правых частях в ПД-уравнении, который рассматривается в §6. Наиболее интересен для практических приложений вопрос о порядке сингулярности решения ПД-уравнения в окрестности границы и ее угловых точек. Основываясь на сведении общего векторного ПД-уравнения к двум уравнениям вида $(1 - \Delta)^{\pm 1/2} u = f$ и используя результаты относительно решений таких уравнений в весовых классах Соболева [27], можно установить величину порядка сингулярности решения в окрестности точек границы в векторной задаче.

В §7 изучается зависимость решений ПД уравнения и исходной задачи дифракции от параметра k . Доказывается справедливость принципа предельного поглощения.

Результаты раздела опубликованы в работах [12, 40, 43, 44, 95, 96, 150, 151, 162, 164, 166–168, 171, 172, 175].

§1 Постановка задачи дифракции. Теорема единственности

Пусть M – замкнутая связная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^3 класса C^∞ . Пусть $\bar{\Omega} \subset M$,

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i, \quad \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset \quad (i \neq j) -$$

объединение конечного числа связных ориентированных незамкнутых и непересекающихся поверхностей класса C^∞ в \mathbb{R}^3 . Край $\partial\Omega_j = \bar{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞ , сходящихся под углами, отличными от нулевого: $\Gamma = \partial\Omega = \bigcup_j \partial\Omega_j$.

Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω , расположенному в свободном пространстве с волновым числом k , $k^2 = \omega^2 \mu (\epsilon + i\sigma\omega^{-1})$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ ($k \neq 0$), состоит в определении рассеянного электромагнитного поля:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_+ \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{M}_- \setminus \Gamma_\delta), \quad (3)$$

удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}; \quad (4)$$

краевым условиям для касательных составляющих электрического поля на поверхности экрана:

$$\mathbf{E}_\tau \Big|_\Omega = -\mathbf{E}_\tau^0 \Big|_\Omega; \quad (5)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3); \quad (6)$$

условиям на бесконечности:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = o(r^{-1}), \quad r := |x| \rightarrow \infty \text{ при } \operatorname{Im} k > 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{e}_r - \mathbf{E} = o(r^{-1}), \quad \mathbf{E} \times \mathbf{e}_r + \mathbf{H} = o(r^{-1}),$$

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \text{ при } \operatorname{Im} k = 0 \quad (8)$$

(условия Сильвера-Мюллера [110]). Здесь $\mathbf{e}_r = x/|x|$, \times означает векторное произведение; $\Gamma_\delta := \{x : |x - y| < \delta, y \in \Gamma\}$. Электромаг-

нитные поля гармонически зависят от времени (множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен); $\omega > 0$ – круговая частота; $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\sigma \geq 0$ – проводимость среды; M_+ и M_- – соответственно, внешность и внутренность поверхности M . Через ν будем обозначать единичный вектор внешней нормали к M . Для полного поля $\mathbf{E}^{\text{полн}} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}$, $\mathbf{H}^{\text{полн}} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}$.

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\bar{\Omega}$ так, что для некоторого $\delta > 0$

$$\mathbf{E}^0 \in C^\infty(\Omega_\delta), \quad \Omega_\delta = \{x : |x - y| < \delta, y \in \Omega\}, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{E}_\tau^0 \Big|_{\Omega} \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (10)$$

Обычно падающее поле – это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь [63], расположенный вне $\bar{\Omega}$. В этих случаях условия (9), (10) выполнены. Поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

Определение 1. Решение \mathbf{E} , \mathbf{H} задачи (4)–(8), удовлетворяющее условию (3), будем называть квазиклассическим.

Такое название обусловлено тем, что, во-первых, как и в классической постановке, разыскивается гладкое, непрерывное вплоть до Ω (с каждой стороны) решение, а во-вторых, в (3)–(8) не конкретизируется поведение решения в окрестности Γ , и ставится общее условие (6) (решение задачи не будет непрерывным вплоть до $\bar{\Omega}$; в окрестности Γ функции \mathbf{E} , \mathbf{H} имеют особенность). Часто условие (6) заменяют более жесткими условиями Мейкснера [136], указывая порядок особенности компонент поля в окрестности «ребра». Но в окрестности угловых точек границы Γ такие условия неизвестны (они будут обсуждаться в §6).

Условия (8) на бесконечности эквивалентны условиям Зоммерфельда ($\text{Im } k = 0$, $k \neq 0$):

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - ik \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = o(r^{-1}), \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (11)$$

которые иногда легче проверить. Доказательство этого утверждения имеется в [110]. Условия (7), (8), (11) выполняются равномерно по всем направлениям \mathbf{e}_r .

Имеет место теорема единственности для задачи (3)–(8). Доказательство опирается на энергетическое тождество, получаемое с помощью леммы Лоренца. Однако обычно эта лемма устанавливается для гладких \mathbf{E} , \mathbf{H} [92], в то время как в нашем случае поля \mathbf{E} , \mathbf{H} будут иметь особенности в окрестности Γ . Обобщение результатов на этот случай не совсем элементарно и представлено в [12, 95].

Теорема 1. *Задача (3)–(8) при ($\operatorname{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$) имеет не более одного решения.*

§2 Пространства W и W' сечений векторных расслоений над Ω

Пусть M – замкнутая связная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^3 класса C^∞ (замкнутая поверхность – это двумерное компактное многообразие без края). Пусть $\bar{\Omega} \subset M$ – подмногообразие с краем многообразия M , не обязательно связное, с конечным числом компонент связности, каждая из которых имеет размерность два. Предполагаем, что край $\Gamma := \partial\Omega$ – кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения класса C^∞ .

Обозначим через TM касательное расслоение над M со стандартным скалярным произведением в слое $T_x M$ (касательной плоскости). Фиксируем $U = \{U_\alpha\}$ – конечное покрытие M координатными окрестностями, $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ – локальные карты, $\{\varphi_\alpha\}$ – подчиненное покрытию U разбиение единицы. Для всякого гладкого сечения $u \in C^\infty(M)$ расслоения TM введем функции [144]

$$u_\alpha = \varphi_\alpha u \in C_0^\infty(V_\alpha), \quad u_\alpha = (u_\alpha^1, u_\alpha^2),$$

отождествляя множество U_α с его образом в \mathbb{R}^2 . Для скалярной функции $g \in C^\infty(M)$ полагаем $g_\alpha = \varphi_\alpha g$. Определяем пространство Соболева $H^s(M)$ как пополнение $C^\infty(M)$ по норме $\|\cdot\|_s$ для любого $s \in \mathbb{R}$, где

$$\|u\|_s^2 = \sum_{\alpha} \left(\|u_\alpha^1\|_s^2 + \|u_\alpha^2\|_s^2 \right), \quad \|g\|_s^2 = \sum_{\alpha} \|g_\alpha\|_s^2.$$

Скалярное произведение и норма в $H^s(\mathbb{R}^2)$ определяются обычным образом:

$$(u, v)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \quad \|u\|_s^2 = (u, u)_s; \quad \langle \xi \rangle := \left(1 + \|\xi\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через \hat{u} обозначено преобразование Фурье распределения u . Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по \mathbb{R}^2 . В дальнейшем нас будут интересовать, главным образом, пространства вектор-функций, поэтому через u, v будем обозначать векторы $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$ и т.д. При этом в записи $u \in H^s$ символ H^s уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой:

$$(u, v)_s = (u_1, v_1)_s + (u_2, v_2)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = \|u_1\|_s^2 + \|u_2\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств в векторном случае, т.к. во всех ситуациях из контекста ясно, о каком пространстве идет речь. Для другого покрытия, другого разбиения единицы и других карт получится эквивалентная норма. Таким образом, пространство $H^s(M)$ определено корректно.

Положим для любого $s \in \mathbb{R}$ [149]

$$H^s(\Omega) := \left\{ u|_{\Omega} : u \in H^s(M) \right\};$$

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in H^s(M) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega} \right\}.$$

Пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ может быть получено замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_s$. Отметим, что обозначения для H^s в скалярном и векторном случае совпадают. Однако из контекста всегда ясно, о каком пространстве идет речь.

Определим операции «поверхностной дивергенции и градиента». Будем считать, что покрытие U и локальные карты выбраны так, что первая квадратичная форма поверхности $U = U_\alpha$ в локальных координатах имеет вид $dl^2 = G(x_1, x_2) (dx_1^2 + dx_2^2)$; $G = G_\alpha$ (этого всегда можно добиться [143, с. 111]). Положим в каждой $U = U_\alpha$:

$$\text{div } u = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial(u_1 \sqrt{G})}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 \sqrt{G})}{\partial x_2} \right);$$

$$\text{grad } g = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} e_2 \right).$$

Тогда для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\operatorname{div} u = \sum_{\alpha} \operatorname{div} u_{\alpha}, \quad \operatorname{grad} g = \sum_{\alpha} \operatorname{grad} g_{\alpha},$$

где $u_{\alpha} = \varphi_{\alpha} u$, $g_{\alpha} = \varphi_{\alpha} g$.

Далее определим гильбертово пространство $W = W(\bar{\Omega})$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_W$

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{-1/2}^2$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_W = (u, v)_{-1/2} + (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)_{-1/2}.$$

Пусть W_i есть замыкание по норме $\|\cdot\|_W$ $W_i^0 (i=1, 2)$:

$$W_1 = \bar{W}_1^0, \text{ где } W_1^0 := \{ u \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \};$$

$$W_2 = \bar{W}_2^0, \text{ где } W_2^0 := \{ u \in C_0^\infty(\Omega) : u = \operatorname{grad} h, h \in C_0^\infty(\Omega) \}.$$

Следующие предложения описывают свойства пространства W [12, 95].

Предложение 1. *Пространство W разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств W_1 и W_2 :*

$$W = W_1 \oplus W_2.$$

Предложение 2.

$$W = \{ u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) : \operatorname{div} u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \}.$$

Предложение 3. *Имеют место непрерывные вложения*

$$\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \subset W \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$$

и оценки норм

$$\|u\|_{-1/2} \leq \|u\|_W \leq C_0 \|u\|_{1/2}.$$

Кроме того,

$$\|u\|_W = \|u\|_{-1/2}$$

для $u \in W_1$,

$$C_1 \|u\|_{1/2} \leq \|u\|_W \leq C_2 \|u\|_{1/2}$$

для $u \in W_2$.

Введем операции, определяемые в локальных координатах в окрестности $U = U_\alpha$ следующим образом:

$$\text{rot}_v u = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial(u_1 \sqrt{G})}{\partial x_1} - \frac{\partial(u_2 \sqrt{G})}{\partial x_2} \right);$$

$$\text{grad}' g = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} e_1 - \frac{\partial g}{\partial x_1} e_2 \right);$$

в общем случае для $u = \sum_\alpha u_\alpha$, $g = \sum_\alpha g_\alpha$:

$$\text{rot}_v u = \sum_\alpha \text{rot}_v u_\alpha;$$

$$\text{grad}' g = \sum_\alpha \text{grad}' g_\alpha.$$

Рассмотрим разложение $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$, более подробно. Всякий элемент $u \in C_0^\infty(\Omega)$ представим в виде

$$\begin{aligned} u &= (1 - P)u + Pu = \text{grad}' g + \text{grad } h = \\ &= \text{grad}' \Delta^{-1}(\text{rot}_v u) + \text{grad } \Delta^{-1}(\text{div } u). \end{aligned}$$

Действие проекторов P и $(1 - P)$ на всем W доопределяется по непрерывности. Очевидно, что

$$\text{div grad}' g \equiv 0; \quad \text{rot}_v \text{grad } h \equiv 0.$$

Ниже используются две формулы, являющиеся следствием общей формулы Стокса [143]:

$$\int_M u \cdot \text{grad } b \, ds = - \int_M (\text{div } u) b \, ds; \quad (12)$$

$$\int_M u \cdot \text{grad}' b \, ds = - \int_M (\text{rot}_v u) b \, ds; \quad (13)$$

$$u, b \in C^\infty(M).$$

Формулы (12), (13) могут быть получены с помощью перехода к локальным координатам.

Следующие предложения описывают свойства пространства $W' = (W(\bar{\Omega}))'$ – антидвойственного к W [12, 95].

Предложение 4.

$$W' = \left\{ f \Big|_{\Omega} : f \in H^{-1/2}(M), \operatorname{rot}_v f \in H^{-1/2}(M) \right\};$$

$$H^{1/2}(\Omega) \subset W' \subset H^{-1/2}(\Omega).$$

Замечание 1. $C^\infty(\bar{\Omega})$ плотно в W' .

Предложение 5. Пространство W' разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств:

$$W' = W^1 \oplus W^2, \text{ где}$$

$$W^1 := \{f \in W' : \operatorname{div} f = 0\}, \quad W^2 := \{f \in W' : \operatorname{rot}_v f = 0\}.$$

Отметим, что все результаты §2 остаются в силе, если вместо подмногообразия с краем $\bar{\Omega}$ рассматривать многообразие без края M .

§3 Представление решений и система интегродифференциальных уравнений на экранах

Будем искать решение задачи (3)–(8) в виде векторного потенциала:

$$\mathbf{E} = ik^{-1} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} (A_l u) + k^2 A_l u \right); \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} (A_l u); \quad (15)$$

$$A_l u = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds; \quad x = (x_1, x_2, x_3) \notin \bar{\Omega}. \quad (16)$$

Здесь $u(y)$ – касательное векторное поле, заданное на Ω ; $u(y) \cdot v(y) = 0$ для всех $y \in \Omega$, где $v(y)$ – единичный вектор нормали к Ω в точке y . Физический смысл u – плотность поверхностного тока на Ω .

Будем предполагать, что u удовлетворяет условиям

$$u \in W(\bar{\Omega}); \quad (17)$$

$$u, \operatorname{div} u \in C^1(\Omega). \quad (18)$$

Переходя к локальным координатам, нетрудно доказать, что

$$A_l u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}).$$

Как показано в [6], оператор A_1 действует непрерывно в пространствах

$$A_1 : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^3).$$

Нетрудно доказать, что

$$\operatorname{div}(A_1 u) = A_1(\operatorname{div} u), \quad x \notin \bar{\Omega}, \quad u \in W.$$

Это равенство достаточно доказать для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ в силу плотности этого множества в W и в $\tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})$. При этом будем иметь $A_1(\operatorname{div} u) \in H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^3)$.

Если u удовлетворяет условиям (17), (18), то (14) эквивалентно

$$\mathbf{E} = ik^{-1}(\operatorname{grad} A_1(\operatorname{div} u) + k^2 A_1 u), \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (19)$$

Поля $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$, определяемые по формулам (14), (15) (или (19)), удовлетворяют уравнениям Максвелла (4) в $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ и условиям на бесконечности (7), (8) (или (11)). Это сразу следует из свойств ядра в интегральном представлении (16) и выбора \mathbf{E}, \mathbf{H} в виде (14), (15).

Имеют место утверждения для предельных значений \mathbf{E} и \mathbf{H} , когда точка x опускается на Ω . Пусть $x \in \Omega$. Тогда касательные компоненты поля \mathbf{E} и нормальная компонента поля \mathbf{H} непрерывны вплоть до Ω (исключая точки края Γ). Точнее,

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(x) \times \mathbf{E}(x + v(x) - t) = v(x) \times \mathbf{E}^{(0)}(x);$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(x) \cdot \mathbf{H}(x + v(x) - t) = v(x) \cdot \mathbf{H}^{(0)}(x), \quad x \in \Omega.$$

Для нормальной компоненты поля \mathbf{E} и касательных компонент поля \mathbf{H} имеем формулы

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} v(x) \cdot \mathbf{E}(x + v(x) - t) = \pm \frac{i}{2k} \operatorname{div} u(x) + v(x) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(x), \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} v(x) \times \mathbf{H}(x + v(x) - t) = \pm \frac{1}{2} u(x) + v(x) \times \mathbf{H}^{(0)}(x), \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{E}^{(0)}(x) = \frac{i}{4\pi k} \left(\int_{\Omega} \operatorname{grad}_x \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \operatorname{div} u(y) \right)_{x=x} ds + k^2 \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds \right);$$

$$\mathbf{H}^{(0)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \operatorname{rot}_x \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) \right)_{x=x} ds,$$

а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Из (21) получаем

$$u(x) = [v(x) \times \mathbf{H}(x)]_{\Omega}, \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

где $[\cdot]_{\Omega}$ означает разность предельных значений при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow -0$, $x = x + v(x)t$, в точках $x \in \Omega$. Эта формула объясняет физический смысл u .

Доопределим касательные составляющие поля \mathbf{H} и нормальную компоненту поля \mathbf{E} с каждой стороны Ω по формулам (20), (21). Тогда \mathbf{E} , \mathbf{H} будут непрерывны (с каждой стороны) в точках Ω , и условие (3) выполняется. Краевое условие (5) приводит к интегродифференциальному уравнению для u . Опуская точку x^1 на Ω , из (8) и (9), будем иметь

$$\operatorname{grad}_{\tau} A(\operatorname{div} u) + k^2 A_{\tau} u = f; \quad x \in \Omega; \quad (23)$$

$$A u = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds, \quad A_{\tau} u := (A u)_{\tau}; \quad (24)$$

$$f = 4\pi i k \mathbf{E}_{\tau}^0 \Big|_{\Omega}; \quad f \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \quad (25)$$

Как было показано выше,

$$A_{\tau} u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3), \quad u \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}). \quad (26)$$

Тогда из (15), (16), (19) находим, что $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ при $u \in W$, и условие (6) конечности энергии в любом ограниченном объеме также выполнимо.

Таким образом, если u является решением (23) и удовлетворяет условиям (17), (18), то формулы (14)–(16) (или (19)) дают квазиклассическое решение задачи (3)–(8) на Ω . Кроме того, если u – нетривиальное решение, то, в силу (22), \mathbf{E} , \mathbf{H} – также нетривиальное решение (3)–(8). Тогда из теоремы единственности следует

Теорема 2. Уравнение (23) имеет не более одного решения, удовлетворяющего условиям (17), (18).

¹ $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка в \mathbb{R}^3 , а $x \in \Omega$ – точка на экране (с локальными координатами).

В следующих параграфах будет доказано, что при $\operatorname{Im} k \geq 0, r \neq 0$ уравнение (23) всегда разрешимо. Поэтому формулы (14)–(16), (19) дают (единственное) решение задачи (3)–(8). Тем самым будет установлено, что всякое решение (3)–(8) представимо в виде векторного потенциала.

§4 Сведение задачи к векторному псевдодифференциальному уравнению на Ω

Рассмотрим ядро интегрального оператора (24). Фиксируем α , $U = U_\alpha$, $V = V_\alpha$. Пусть $\chi^{-1} : V \rightarrow U$, $x = \chi^{-1}(x) \in U$, $x = (x_1, x_2) \in V$ – локальные координаты на U ; $x = (x_1, x_2, x_3)$. Имеем

$$|x - y| = |\chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(x_0)| = \Phi(x, x_0) |x - x_0|,$$

где $\Phi(x, x_0) \in C^\infty(V \times V)$ (т.к. поверхность Ω класса C^∞) и $\Phi(x, x_0) > 0$ при $x, x_0 \in V$; кроме того, $\Phi(x, x_0) = \Phi(x_0, x)$. Далее,

$$\Phi(x, x_0) = \Theta(x_0) + \Pi(x, x_0), \quad \Theta(x_0) := \Phi(x_0, x_0), \quad \Pi \in C^\infty(V \times V),$$

причем $\Pi(x_0, x_0) = 0$ при $x_0 \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} &= \frac{e^{ik\Phi(x, x_0) |x-x_0|}}{\Phi(x, x_0) |x-x_0|} = \\ &= \frac{e^{-|x-x_0|}}{\Theta(x_0) |x-x_0|} + e^{-|x-x_0|} \frac{\Pi_1(x, x_0)}{|x-x_0|} + |x-x_0| \Phi_1(x, x_0) + \Phi_2(x, x_0), \end{aligned}$$

где $\Pi_1, \Phi_1, \Phi_2 \in C^\infty(V \times V)$, $\Pi_1(x_0, x_0) = 0$ при $x_0 \in V$.

Дифференциал площади на поверхности U представим в виде

$$ds = G(x) dx, \quad G(x) = G(x_0) + Q(x, x_0), \quad G \in C^\infty(V), \quad Q \in C^\infty(V \times V);$$

$$Q(x, x_0) := G(x) - G(x_0) \text{ и } Q(x_0, x_0) = 0 \text{ при } x_0 \in V.$$

Объединяя все формулы, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik\Phi(x, x_0) |x-x_0|}}{\Phi(x, x_0) |x-x_0|} G(x) &= \frac{G(x_0) e^{-|x-x_0|}}{\Theta(x_0) |x-x_0|} + \\ &+ \frac{B(x_0) \cdot (x, x_0)}{|x-x_0|} + e^{-|x-x_0|} + e^{-|x-x_0|} |x-x_0| \left(\hat{F}(x_0) \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} + \end{aligned}$$

$$+|x-x_0|\tilde{\Phi}_1(x,x_0)+\tilde{\Phi}_2(x,x_0), \quad (27)$$

где $G, \Theta \in C^\infty(V)$, $G(x_0) > 0$, $\Theta(x_0) > 0$ при $x_0 \in V$; вектор и матрица $B, \hat{F} \in C^\infty(V)$, а функции $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 \in C^\infty(V \times V)$.

Будем рассматривать операторы A (действующий на функции) и A_τ (действующий в сечениях векторных расслоений) как псевдо-дифференциальные операторы на многообразии M или Ω , в зависимости от ситуации. Для любой координатной окрестности $U = U_\alpha$ и, соответственно, $V = V_\alpha$, определим ограничение A и A_τ на V по формулам

$$A_V = p_V A q_V : C_0^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V), \quad \hat{A}_V = p_V A_\tau q_V : C_0^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V),$$

где $q_V : C_0^\infty(V) \rightarrow C^\infty(M)$ – естественное вложение (продолжение нулем вне V), а $p_V : C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(V)$ – оператор ограничения, переводящий f в $f|_V$. Здесь не делается различия в обозначениях для операторов q_V , p_V и пространств C_0^∞ , C^∞ в «скалярном» и «векторном» случае. Если A_V и \hat{A}_V превращаются в скалярный и матричный ПДО, то A и A_τ – ПДО на многообразии M [85] или на Ω , если рассматривать ограничение A и A_τ на Ω :

$$A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega), \quad A_\tau : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega).$$

Определим действие оператора A на $C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку требуется знать лишь значения Au в точках $x \in \Omega$ (или $x \in M$), то используем представление для A_V в виде

$$\begin{aligned} A_V u = & \int_V \frac{a_0(x_0)}{|x-x_0|} e^{-|x-x_0|} u(x) dx + \int_V e^{-|x-x_0|} \frac{B(x_0) \cdot (x-x_0)}{|x-x_0|} u(x) dx + \\ & + \int_V e^{-|x-x_0|} |x-x_0| \left(\hat{F}(x_0) \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) \cdot \frac{x-x_0}{|x-x_0|} u(x) dx + \\ & + \int_V \eta(|x-x_0|) |x-x_0| \Psi_1(x_0, x-x_0) u(x) dx + \\ & + \int_V \eta(|x-x_0|) \Psi_2(x_0, x-x_0) u(x) dx; \end{aligned} \quad (28)$$

$$a_0(x_0) := \frac{G(x_0)}{\Theta(x_0)} = \sqrt{G(x_0)},$$

$\eta(t) = 1$ при $t \leq R$, $\eta(t) = 0$ при $t \geq 2R$ – бесконечно дифференцируемая «функция-срезка», а R выбрано столь большим, чтобы $\eta(|x - x_0|) \equiv 1$ при $x, x_0 \in V$. Кроме того, в (28) $\psi_i(x_0, x - x_0) = \tilde{\Phi}_i(x, x_0)$, $x, x_0 \in V$; функции $\psi_i \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^2)$ гладко продолжены на \mathbb{R}^2 по второму аргументу. Очевидно, что формулы (24) и (28) порождают один и тот же оператор при $x, x_0 \in V$, и его определение не зависит от выбора функции η .

Каждое слагаемое в (28) есть интегральный оператор типа свертки. Вычислим преобразование Фурье ядер первых трех операторов и обозначим через $b_1(x_0, \xi)$ и $b_2(x_0, \xi)$ преобразования Фурье функций $\eta(|x|)|x|\psi_1(x_0, x)$ и $\eta(|x|)\psi_2(x_0, x)$ по аргументу x . Тогда (28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A_V u = & \int \frac{a_0(x_0)}{\langle \xi \rangle} \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi - i \int \frac{B(x_0) \cdot \xi}{\langle \xi \rangle^3} \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi + \\ & + \int \frac{tr \hat{F}(x_0) \langle \xi \rangle^2 - 3(\hat{F}(x_0) \xi) \cdot \xi}{\langle \xi \rangle^5} \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi + \\ & + \int b_1(x_0, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi + \int b_2(x_0, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\hat{u}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $u \in C_0^\infty(V)$, а символы $b_1, b_2 \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^2)$ – преобразования Фурье финитных функций.

Формула (29) определяет ПДО

$$A_V : C_0^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$$

порядка -1 с положительно однородным (по ξ) главным символом $a_0(x_0) |\xi|^{-1}$.

Очевидно, что последнее слагаемое в (28) (или в (29)) дает оператор с бесконечно гладким ядром, т.е. принадлежит классу $L^{-\infty}(V)$ [85, 149]. Для функции $b_1(x_0, \xi)$ имеем следующую оценку:

$$|\partial_{x_0}^p \partial_\xi^q b_1(x_0, \xi)| \leq C_{K,p,q} \langle \xi \rangle^{-2+|q|} \quad (30)$$

для любого компакта $K \subset V$ и любых мультииндексов p, q . Из (30) следует, что $b_1 \in S^{-2}(V)$, и четвертое слагаемое в (29) есть ПДО класса $L^{-2}(V)$ [85, 149].

Таким образом, для ПДО A_V верно представление

$$\begin{aligned} A_V u &\equiv A_V^0 u + B_V u = \int a_V(x_0, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi = \\ &= a_0(x_0) \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi + \int b_V(x_0, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi; \quad (31) \\ a_V(x_0, \xi) &:= a_0(x_0) \langle \xi \rangle^{-1} + b_V(x_0, \xi), \end{aligned}$$

где символ $b_V \in S^{-2}(V)$ и $B_V \in L^{-2}(V)$.

Рассмотрим оператор \tilde{A} , образованный с помощью «склейки» по формуле

$$\tilde{A}u = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} A_{\alpha} \varphi_{\alpha} u, \quad (32)$$

или

$$\tilde{A}u \equiv \tilde{A}^0 u + \tilde{B}u = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} A_{\alpha}^0 \varphi_{\alpha} u + \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} B_{\alpha} \varphi_{\alpha} u, \quad (33)$$

где $A_{\alpha} \equiv A_V$, $A_{\alpha}^0 \equiv A_V^0$, $B_{\alpha} \equiv B_V$ при $V \equiv V_{\alpha}$; $1 = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}$, а функции ψ_{α} таковы, что $\text{supp } \psi_{\alpha} \subset V_{\alpha}$, $\psi_{\alpha} \varphi_{\alpha} \equiv \varphi_{\alpha}$. Оператор $\tilde{A} : C_0^{\infty}(\Omega) \rightarrow C^{\infty}(\Omega)$.

Поскольку ядро оператора A в (24) имеет особенность только при $x = y$, A отличается от \tilde{A} на оператор с бесконечно гладким ядром:

$$A = \tilde{A} + \tilde{K}, \quad \tilde{K} \in L^{-\infty}(\Omega). \quad (34)$$

ПДО с символом $\langle \xi \rangle^{-1}$ осуществляет изоморфизм $H^{-1/2}(M)$ на $H^{1/2}(M)$ [140]. Так как функция $a_0(x_0) > 0$ в любой координатной окрестности, $C^{\infty}(\Omega)$ плотно в $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$, и $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$ антидвойственno к $H^{1/2}(\Omega)$, то оператор \tilde{A}^0 продолжается по непрерывности до ограниченного, непрерывно обратимого оператора

$$\tilde{A}^0 : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega).$$

Тогда в силу (33) и (34) оператор

$$A : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$$

будет ограниченным фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Для анализа свойств оператора A_τ рассмотрим его ограничение A_V на V . Пусть $\mathbf{e}_i(x)$ ($i=1, 2$) – базисные орты локальной системы координат на поверхности U . Действие \hat{A}_V на $u \in C_0^\infty(V)$ в локальных координатах можно представить в виде

$$\hat{A}_V u = \sum_{i,j=1}^2 \mathbf{e}_j(x_0) (A_V^{ij} u_i)(x_0),$$

где

$$A_V^{ij} = \int_V \frac{e^{ik\Phi(x, x_0)|x-x_0|}}{\Phi(x, x_0) |x-x_0|} E_{ij}(x, x_0) u_i(x) \sigma(x) dx;$$

$$E_{ij}(x, x_0) := \mathbf{e}_i(x) \cdot \mathbf{e}_j(x_0), \quad u_i(x) := u(x) \cdot \mathbf{e}_i(x),$$

причем $E_{ij} \in C^\infty(V \times V)$, $E_{ij}(x_0, x_0) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронеккера).

Если A_V^{ij} – ПДО на V , то \hat{A}_V превращается в матричный ПДО, и, следовательно, A_τ – ПДО на многообразии Ω .

Ядра интегральных операторов A_V^{ij} отличаются от ядра интегрального оператора A только сомножителями $E_{ij}(x, x_0)$, поэтому анализ этих операторов полностью аналогичен анализу оператора A . Приведем лишь окончательное представление для \hat{A}_V , соответствующее (31):

$$\begin{aligned} \hat{A}_V u &\equiv \hat{A}_V^0 u + \hat{B}_V u = \int \hat{a}_V(x_0, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi = \\ &= a_0(x_0) \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi + \int \hat{b}_V(x_0, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix_0 \cdot \xi} d\xi, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\hat{a}_V := a_0(x_0) \langle \xi \rangle^{-1} \hat{I} + \hat{b}_V(x_0, \xi)$ (\hat{I} – единичная матрица); матрицы

$$\hat{a}_V = \left\{ a_V^{ij}(x_0, \xi) \right\}_{i,j=1}^2, \quad a_0(x_0) \langle \xi \rangle^{-1} \hat{I}, \quad \hat{b}_V = \left\{ b_V^{ij}(x_0, \xi) \right\}_{i,j=1}^2 -$$

полные символы ПДО \hat{A}_V , \hat{A}_V^0 , \hat{B}_V ;

$$\hat{b}_V \in S^{-2}(V), \quad \hat{B}_V \in L^2(V),$$

где $\hat{u}(\xi)$ – преобразование Фурье вектор-функции $u = (u^1, u^2) \in C_0^\infty(V)$. Отметим также диагональную структуру матричного символа оператора \hat{A}_V^0 .

Определим оператор \hat{A} , образованный с помощью «склейки» по формуле

$$\hat{A}u = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \hat{A}_{\alpha} \varphi_{\alpha} u, \quad (36)$$

или, в подробной записи,

$$\hat{A}u \equiv \hat{A}^0 u + \hat{B}u = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \hat{A}_{\alpha}^0 \varphi_{\alpha} u + \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \hat{B}_{\alpha} \varphi_{\alpha} u, \quad (37)$$

где $\hat{A}_{\alpha} = \hat{A}_V$, $\hat{A}_{\alpha}^0 = \hat{A}_V^0$, $\hat{B}_{\alpha} = \hat{B}_V$ при $V = V_{\alpha}$.

Оператор A_{τ} отличается от \hat{A} на оператор с бесконечно гладким ядром:

$$A = \hat{A} + \hat{K}, \quad \hat{K} \in L^{-\infty}(\Omega). \quad (38)$$

Повторяя рассуждения, приведенные при анализе оператора A и используя диагональность матричных символов операторов \hat{A}_V , находим, что оператор

$$\hat{A}^0 : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$$

непрерывно обратим.

Тогда в силу (37) и (38)

$$A_{\tau} : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$$

будет ограниченным фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Перейдем к изучению оператора, определяемого левой частью формулы (23):

$$Lu := \operatorname{grad}_{\tau} A(\operatorname{div} u) + k^2 A_{\tau} u. \quad (39)$$

Поскольку оператор L будет рассматриваться из W в W' , а $C_0^{\infty}(\Omega)$ плотно в W , достаточно определить L на $C_0^{\infty}(\Omega)$ и доказать его ограниченность в указанных пространствах. Тогда действие L на всем W доопределяется по непрерывности.

Квадратичная форма оператора L имеет вид

$$(Lu, u) \equiv \int_{\Omega} Lu \cdot \bar{u} ds = \int_{\Omega} \operatorname{grad}_{\tau} A(\operatorname{div} u) \cdot \bar{u} ds + k^2 \int_{\Omega} A_{\tau} u \cdot \bar{u} ds. \quad (40)$$

С помощью формул векторного анализа и теоремы Стокса получаем

$$(Lu, u) = - (A(\operatorname{div} u), \operatorname{div} u) + k^2 (A_{\tau} u, u). \quad (41)$$

В силу определения пространства W ограниченность формы (41) в W будет доказана, если будет установлена ограниченность квадратичных форм (Au, u) и $(A_\tau u, u)$ на $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$. В свою очередь, ввиду (34) (38), достаточно доказать ограниченность форм $(\tilde{A}u, u)$ и $(\hat{A}u, u)$. Докажем ограниченность формы $(\tilde{A}u, u)$; доказательство ограниченности формы $(\hat{A}u, u)$ совершенно аналогично.

Для формы $(\tilde{A}u, u)$ имеем

$$(\tilde{A}u, u) = \sum_{\alpha} (\psi_{\alpha} A_{\alpha} \varphi_{\alpha} u, u) = \sum_{\alpha} (A_{\alpha} u_{\alpha}, v_{\alpha}),$$

где $v_{\alpha} := \psi_{\alpha} u$, $\text{supp } v_{\alpha} \subset V_{\alpha}$, $\text{supp } u_{\alpha} \subset V_{\alpha}$.

Остается доказать ограниченность формы $(A_{\alpha} u_{\alpha}, v_{\alpha})$. Но в локальных координатах оператор A_{α} есть эллиптический ПДО порядка -1 класса $L^{-1}(V_{\alpha})$, который ограничен из $H^{-1/2}(\overline{V}_{\alpha})$ в $H^{1/2}(V_{\alpha})$, и, следовательно, форма $(A_{\alpha} u_{\alpha}, v_{\alpha})$ также ограничена на $H^{-1/2}(\overline{V}_{\alpha})$.

Ограничность квадратичной формы оператора L на W влечет ограниченность полуторалинейной формы (Lu, v) на W и позволяет рассматривать оператор L как ограниченный оператор $L: W \rightarrow W'$, где W' – антидвойственное пространство к W [106].

Теперь (23) можно рассматривать как векторное псевдодифференциальное уравнение:

$$Lu = f, \quad u \in W, \quad f \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \subset W'. \quad (42)$$

При этом равенство в (42) понимается в смысле распределений. Точнее, дадим

Определение 2. Элемент $u \in W$ будем называть обобщенным решением уравнения (42) (или (23)), если для любых $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполняется вариационное соотношение

$$-(A(\operatorname{div} u), \operatorname{div} v) + k^2 (A_{\tau} u, v) = (f, v). \quad (43)$$

§5 Теоремы о фредгольмовости и разрешимости векторного псевдодифференциального уравнения

Ниже будет доказано, что $L: W \rightarrow W'$ – фредгольмов оператор с нулевым индексом. Для этого достаточно представить L в виде суммы непрерывно обратимого и компактного операторов.

Запишем (39) в виде

$$Lu = L_1 u + k^2 L_2 u, \quad (44)$$

где

$$L_1 u := \operatorname{grad}_\tau A(\operatorname{div} u), \quad L_2 u := A_\tau u,$$

и рассмотрим действие операторов L_1 и L_2 на подпространствах W_1 и W_2 . В силу предложений 1, 5 для оператора L имеет место матричное разложение:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{L}_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $\hat{L}_1: W_2 \rightarrow W^2$ – ограниченный оператор. Для оператора L_2 :

$$L_2 = \begin{pmatrix} \hat{L}_{11} & \hat{L}_{12} \\ \hat{L}_{21} & \hat{L}_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

где $\hat{L}_{ij}: W_i \rightarrow W^j$ – ограниченные операторы. Нормы на W_i и W^j индуцированы нормами на W и W' .

Лемма 1. *Оператор $L_0: W_i \rightarrow W^j$ компактен, если существует такое $s \in \mathbb{R}$, что*

$$\|L_0 u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{\tilde{H}^{i-3/2}(\bar{\Omega})}, \quad s > 3/2 - j; \quad i, j = 1, 2. \quad (47)$$

По формулам (33), (34) для оператора \hat{L}_1 имеем представление

$$\hat{L}_1 u = \operatorname{grad} \tilde{A}^0(\operatorname{div} u) + \operatorname{grad} (\tilde{B} + \tilde{K})(\operatorname{div} u) \equiv -L_1^{(1)} u + L_1^{(2)} u. \quad (48)$$

Так как \tilde{B} – ПДО порядка -2 , а \tilde{K} – оператор с бесконечно гладким ядром, то для $L_1^{(2)}$ выполняются условия леммы 1 с $i = j = 2$, $s = 1/2$, и оператор $L_1^{(2)}$ компактен. Квадратичная форма оператора $L_1^{(1)}$ коэрцитивна на W_2 :

$$(L_1^{(1)} u, u) = (\tilde{A}^0(\operatorname{div} u), \operatorname{div} u) \geq C \|\operatorname{div} u\|_{-1/2}^2 \geq C_1 \|u\|_W^2, \quad u \in W_2.$$

Отсюда следует [106], что $L_1^{(1)}$ непрерывно обратим. Таким образом, \hat{L}_1 – фредгольмов и $\text{ind } \hat{L}_1 = 0$.

Далее, поскольку L_2 – ПДО порядка -1 , то для операторов \hat{L}_{ij} , $ij \neq 1$ (т.е. для \hat{L}_{12} , \hat{L}_{21} , \hat{L}_{22}) выполняются условия леммы 1 с $s = i - 1/2$; эти операторы также компактны. Рассмотрим оператор \hat{L}_{11} :

$$\hat{L}_{11} = L_{11}^{(1)} + L_{11}^{(2)}, \quad (49)$$

где

$$L_{11}^{(1)} := p(1 - \tilde{P})q\hat{A}^0(1 - P), \quad L_{11}^{(2)} := p(1 - \tilde{P})q(\hat{B} + \hat{K})(1 - P).$$

Оператор $\hat{B} + \hat{K}$ – ПДО порядка -2 , поэтому для $L_{11}^{(2)}$ выполняются условия Леммы 1 с $i = j = 1$, $s = 3/2$, и, следовательно, $L_{11}^{(2)}$ тоже компактен.

Квадратичная форма оператора $L_{11}^{(1)}$ коэрцитивна на W_1 :

$$(L_{11}^{(1)}u, u) = (\hat{A}^0u, u) \geq C\|u\|_{-1/2}^2 = C\|u\|_W^2, \quad u \in W_1,$$

поэтому [106] $L_{11}^{(1)}$ непрерывно обратим. Тем самым установлена фредгольмовость оператора \hat{L}_{11} и $\text{ind } \hat{L}_{11} = 0$.

Объединяя полученные результаты с учетом формул (44)–(49), находим, что имеет место матричное представление для L в виде

$$L = L^1 + L^2 = \begin{pmatrix} k^2 L_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & -L_1^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 L_{11}^{(2)} & k^2 \hat{L}_{12} \\ k^2 \hat{L}_{21} & L_1^{(2)} + k^2 \hat{L}_{22} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где оператор L^2 компактен, а оператор L^1 непрерывно обратим при $k \neq 0$, поскольку операторы $L_{11}^{(1)}$, $L_1^{(1)}$ непрерывно обратимы. Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Оператор $L = L(k) : W \rightarrow W'$ является фредгольмовым при $k \neq 0$ и $\text{ind } L(k) = 0$.*

Замечание 2. *При $k = 0$ оператор $L(0)$ фредгольмовым не будет, т.к. $W_1 \subset \ker L^1$, $\dim W_1 = \infty$.*

Замечание 3. *Выше было установлено, что $L_{11}^{(1)}$ и $L_1^{(1)}$ – равномерно положительные операторы. Матричное разложение оператора L^1 в (50) показывает, что главная часть оператора L (оператор L^1) не будет положительно определенным или отрица-*

тельно определенным оператором при $\operatorname{Re} k \neq 0$, однако L^1 коэрциден при $\operatorname{Im} k \neq 0$:

$$|(L^1 u, u)| \geq C \|u\|_W^2, \quad u \in W.$$

При $\operatorname{Im} k = 0, k \neq 0$ оператор L^1 , очевидно, коэрциденным не будет.

На основе теорем 2 и 3 при $\operatorname{Im} k \geq 0, k \neq 0$, можно получить более сильный результат об однозначной разрешимости уравнения (23) (или (42)). Для этого нам потребуются утверждения о гладкости решений уравнения (42) в Ω при $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Пусть $f = f^1 + f^2$, $f^1 \in W^1$, $f^2 \in W^2$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Запишем уравнение (42) с учетом матричного представления (50) в виде системы из двух уравнений ($k \neq 0$):

$$L_{11}^{(1)} u_1 = -L_{11}^{(2)} u_1 - \hat{L}_{12} u_2 + k^{-2} f^1; \quad (51)$$

$$L_1^{(1)} u_2 = L_1^{(2)} u_2 + k^2 \hat{L}_{21} u_1 + k^2 \hat{L}_{22} u_2 - f^2, \quad (52)$$

где $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$, $u = u_1 + u_2$.

Операторы $\hat{L}_{ij} : W_i \rightarrow W_j$ ($ij \neq 1$) являются ПДО порядка -1 класса $L^{-1}(\Omega)$, $L_{11}^{(2)} : W_1 \rightarrow W^1$ – ПДО порядка -2 класса $L^{-2}(\Omega)$, $L_1^{(2)} : W_2 \rightarrow W^2$ – ПДО порядка 0 класса $L^0(\Omega)$. Обозначим правую часть в (51) и (52) через g_*^1 и g_*^2 . Тогда будем иметь

$$L_{11}^{(1)} u_1 = g_*^1, \quad g_*^1 \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega); \quad (53)$$

$$L_1^{(1)} u_2 = g_*^2, \quad g_*^2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega). \quad (54)$$

Оператор $L_{11}^{(1)} : W_1 \rightarrow W^1$ есть эллиптический классический ПДО порядка -1 класса $L_{\text{кл}}^{-1}(\Omega)$ с главным символом $\hat{a}_0(x, \xi) = a_0(x)|\xi|^{-1}\hat{I}$. Главный символ $\hat{a}_0 = \hat{a}_0(x, \xi)$ оператора при любом ненулевом элементе $(x, \xi) \in T^*M$ кокасательного расслоения T^*M задает отображение слоев

$$\hat{a}_0(x, \xi) : W_x \rightarrow W'_x,$$

так что в целом получается отображение расслоений $\hat{a}_0 : \pi_0^* W \rightarrow \pi_0^* W'$, где $\pi_0 : T^* M \setminus O \rightarrow M$ – каноническая проекция

кокасательного расслоения без нулевого сечения на базу M ; π_0^*W , π_0^*W' – индуцированные расслоения со слоями W_x , W'_x над каждой точкой $(x, \xi) \in T^*M \setminus O$.

Рассмотрим оператор $L_1^{(1)} : W_2 \rightarrow W^2$, $L_1^{(1)}u := \text{grad } \tilde{A}^0(\text{div } u)$. Этот оператор представляет собой композицию операторов div , \tilde{A}^0 , grad , два из которых дифференциальные, а оператор \tilde{A}^0 – скалярный ПДО с главным символом $a_0(x) |\xi|^{-1}$, который является корректно определенной функцией на кокасательном расслоении T^*M . Согласно теореме о композиции классических ПДО [85, 149], главный символ $\hat{\sigma}_0$ оператора $L_1^{(1)}$ находится как произведение главных символов этих операторов, что дает

$$\hat{\sigma}_0(x, \xi) = -\frac{1}{a_0(x) |\xi|} \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Отметим, что формально символ (55) является вырожденным при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, т.к. определитель матрицы в (55) тождественно равен нулю.

Однако оператор $L_1^{(1)}$ действует на подпространстве W_2 , т.е. на элементы u такие, что $\text{rot}_v u = 0$. Оператор $L_1^{(1)}$ действует на подпространствах $W_2 \rightarrow W^2$ как эллиптический классический ПДО порядка 1 класса $L_{\text{кл}}^1(\Omega)$ с главным символом $-a_0^{-1}(x) |\xi| \hat{I}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} L_{11}^{(1)} &= a_0 \Delta^{-1/2} : W_1 \rightarrow W^1, \\ L_1^{(1)} &= -a_0^{-1} \Delta^{1/2} : W_2 \rightarrow W^2, \end{aligned} \quad (56)$$

понимая под $\Delta^{\pm 1/2}$ классические ПДО с главными символами $|\xi|^{\mp 1}$.

Утверждение 1. Если $u \in W$ – решение уравнения (23) с гладкой правой частью $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $u \in C^\infty(\Omega)$.

Теорема 4. При $\text{Im } k \geq 0$, $k \neq 0$ оператор $L(k) : W \rightarrow W'$ не-прерывно обратим.

Следствие 1. При $\text{Im } k \geq 0$, $k \neq 0$ обобщенное решение $u \in W$ уравнения (23) (или (42)) существует и единствено при любой правой части $f \in W'$ (в частности, при $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$).

Подведем итог исследованию разрешимости задачи дифракции на системе ограниченных экранов Ω произвольной формы.

Теорема 5. Задача (3)–(8) при $\operatorname{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$ имеет единственное решение при любых \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 , удовлетворяющих условию (9).

Следствие 2. Любое решение задачи (3)–(8) при $\operatorname{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$, представимо в виде векторного потенциала (14)–(16) с функцией u , удовлетворяющей условиям (17), (18).

§6 Гладкость обобщенных решений. Порядок сингулярности решений в окрестности угловых точек

Изучение гладкости обобщенных решений в окрестности границы (включая граничные точки) является значительно более сложным, особенно в окрестности угловых точек границы. Для ПДО $\Delta^{\pm 1/2}$ точные результаты были получены в [27]. Ниже мы применим результаты работы [27] для получения оценок порядка сингулярности решения в окрестности угловых точек. При этом рассмотрим два случая: поведение решения в окрестности угловой части границы Γ и поведение решения в окрестности угловой точки.

Перейдем к анализу гладкости решения уравнения $Lu = f$, $u \in W$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Имеем [12, 95] наилучший результат в невесовых классах Соболева:

$$u_1 \in \tilde{H}^{-\varepsilon}(\overline{\Omega}), u_2 \in \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\overline{\Omega}), \varepsilon > 0 -$$

произвольно малое число. Отсюда видно, что существует след

$$u_2 \Big|_{\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma),$$

причем

$$u_2 \Big|_{\Gamma} = 0,$$

т.к. продолжение u_2 нулем вне Ω является непрерывным в норме $\|\cdot\|_{1-\varepsilon}$.

Если граница Γ гладкая, то [12, 95] получаем, что функция u_1 в окрестности границы имеет сингулярность вида

$$u_1 \sim \rho^{\frac{1}{2}}(x)g^1(t), g^1 \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma). \quad (57)$$

Далее находим, что u_2 в окрестности Γ имеет особенность:

$$u_2 \sim \rho^{1/2}(x)g^2(t) + \rho(x)g^2(t), \quad g^2 \in H^{3-\varepsilon}(\Gamma), \quad g^2 \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma). \quad (58)$$

Если граница имеет угловые точки, то поведение u_1, u_2 в окрестности любого гладкого куска Γ' границы Γ (отстоящего на положительное расстояние от угловых точек) имеет тот же вид (57), (58), где надо заменить Γ на Γ' . Этот результат получается, если «срезать» u в окрестности Γ' [27].

Далее, пусть $n = n(t)$ – внешняя нормаль к границе в точке $t \in \Gamma'$. В окрестности гладкого куска Γ' имеет место [12, 95]

Утверждение 2. *Если Γ – гладкая кривая, то $u \cdot n \Big|_{\Gamma} = 0$ как элемент пространства $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma)$. Если Γ' – гладкий кусок Γ , отстоящий на положительное расстояние от угловых точек, то $u \cdot n \Big|_{\Gamma'} = 0$ как элемент пространства $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma')$.*

Перейдем к анализу сингулярности u в окрестности угловой точки P . Пусть $\alpha = \alpha(P)$ – внутренний (по отношению к Ω) угол, под которым пересекаются две гладкие дуги границы в точке P , $0 < \alpha(P) < 2\pi$, $\alpha(P) \neq \pi$. Поскольку $u_2 \Big|_{\Gamma} = 0$, то сингулярность может быть только у функции u_1 . Отобразим диффеоморфно окрестность точки P на δ -окрестность начала координат так, чтобы дуги, образующие угол, перешли в прямолинейные лучи $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$ в полярных координатах (r, φ) в этой δ -окрестности. Как следует из [27], сингулярность в окрестности точки P будет иметь вид

$$u_1 \sim r^{-\tau} \varphi^{-1/2} (\alpha - \varphi)^{-1/2}, \quad r \rightarrow 0, \quad (59)$$

где ν – гладкая и ограниченная функция на $(0, \alpha)$.

Показатель сингулярности τ в (59) определяется величиной угла α , однако τ вычисляется лишь приближенно численными методами (например, как решение трансцендентного уравнения (4.1) в [27]). Известно два предельных результата для τ [27]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi-0} \tau(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \tau(\alpha) = 1,$$

причем $\tau(\alpha) \sim 1 - \left(\ln \frac{1}{\alpha} \right)^{-1}$ при $\alpha \rightarrow +0$.

В заключение §6 приведем таблицу приближенных значений для τ , вычисленных в [27]. Из представленного выше анализа ясно, что показатель сингулярности для u в окрестности угловой точки совпадает с $\tau(\alpha)$ (табл. 1).

Таблица 1

Таблица приближенных значений для $\tau(\alpha)$

α/π	0	0,0500	0,1161	0,1250	0,2500	0,3750	0,5000
$\tau(\alpha)$	1,0000	0,8705	0,8350	0,8317	0,7820	0,7384	0,6956
α/π	0,6250	0,7500	0,8750	0,9000	0,9500	1,0000	1,1250
$\tau(\alpha)$	0,6517	0,6057	0,5561	0,5456	0,5243	0,5022	0,4448
α/π	1,2500	1,3750	1,5000	1,6250	1,7500	1,8750	2,0000
$\tau(\alpha)$	0,3799	0,3073	0,2277	0,1444	0,0702	0,0281	0

§7 Принцип предельного поглощения

Полученные в предыдущих параграфах утверждения о свойствах задачи дифракции на Ω позволяют установить ряд важных результатов, касающихся зависимости решений задачи от параметра k . Прежде всего это относится к предельному переходу в задаче дифракции при $k \rightarrow k_0$, где k – комплексное число, $\operatorname{Im} k > 0$, а k_0 – вещественное, $\operatorname{Im} k_0 = 0$, $k_0 \neq 0$. Если для получения решения возможен предельный переход при $k \rightarrow k_0$, то говорят, что справедлив «принцип предельного поглощения». Принцип предельного поглощения может быть сформулирован как в форме предельного перехода для решения $u = u(k)$ уравнения на Ω (23), так и в виде предельного перехода для рассеянного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(k)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(k)$. В любом случае предполагается, что падающее поле $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^0(k)$, $\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^0(k)$ непрерывно зависит от k (что обычно выполняется на практике). Достаточно считать, что такая зависимость имеет место только в окрестности рассматриваемой точки k_0 , причем для k с положительной мнимой частью $\operatorname{Im} k > 0$, $k \rightarrow k_0$. Ниже будут приведены точные формулировки условия на падающее поле.

Основой для доказательства принципа предельного поглощения является теорема 4 и аналитическая зависимость оператор-

функции $L(k)$ от параметра $k \in C$. Под аналитичностью (голоморфностью) понимается дифференцируемость по норме оператор-функции в каждой точке области аналитичности.

Утверждение 3. *Оператор-функция $L(k): W \rightarrow W'$ является аналитической (голоморфной) при всех $k \in C$.*

Утверждение 4. *Оператор-функция $L^{-1}(k): W' \rightarrow W$ является аналитической (голоморфной) в C_+ (при $\operatorname{Im} k > 0$) и непрерывной в $\overline{C}_+ \setminus 0$ (при $\operatorname{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$).*

Теорема 6. *Пусть $k_0 \neq 0$, $\operatorname{Im} k_0 = 0$, $\operatorname{Im} k > 0$. Тогда если $f(k) \xrightarrow{W'} f(k_0)$ при $k \rightarrow k_0$, то $u(k) \xrightarrow{W} u(k_0)$, $k \rightarrow k_0$, где $u(k)$ и $u(k_0)$ – решения уравнения (23) при k и k_0 , соответственно.*

Теорема 7. *Пусть $k_0 \neq 0$, $\operatorname{Im} k_0 = 0$, $\operatorname{Im} k > 0$. Тогда если $f(k) \xrightarrow{W'} f(k_0)$ при $k \rightarrow k_0$, то $\mathbf{E}(k) \rightarrow \mathbf{E}(k_0)$, $\mathbf{H}(k) \rightarrow \mathbf{H}(k_0)$ в $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ при $k \rightarrow k_0$, где $\mathbf{E}(k)$, $\mathbf{H}(k)$ и $\mathbf{E}(k_0)$, $\mathbf{H}(k_0)$ решения задачи (3)–(8) при k и k_0 , соответственно.*

Замечание 4. Условие $f(k) \xrightarrow{W'} f(k_0)$ будет выполнено, если функции $f(x; k)$ и $\partial f(x; k)/\partial x_j$ непрерывно зависят от параметра k в полуокрестности точки k_0 , точнее при $|k - k_0| < \delta$, $\operatorname{Im} k \geq 0$. Это следует из того, что норма в $C^1(\overline{\Omega})$ сильнее нормы в $W'(\Omega)$,

$$\|f\|_{W'} \leq C_1 \|f\|_{1/2} \leq C_2 \|f\|_{C^1},$$

согласно теоремам вложения [184] и предложению 4.

Таким образом, в теоремах 6, 7 установлен принцип предельного поглощения для задачи дифракции на Ω . С физической точки зрения, этот принцип означает непрерывную зависимость решения задачи от проводимости в среде ($\sigma \geq 0$), поэтому для построения решения в среде «без поглощения» ($\sigma = 0$) иногда искусственно вводят малый параметр $\sigma > 0$ («поглощение»), а затем переходят к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ или получают приближенное решение.

Раздел 2. Сходимость методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и решение уравнения электрического поля

Задача дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем тонком ограниченном экране является классической в электродинамике. Наиболее естественный подход к решению этой задачи – сведение ее к векторному интегралу дифференциальному уравнению на поверхности экрана [19, 191], к так называемому уравнению электрического поля. Теория разрешимости краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла и уравнения электрического поля построена в работах [167, 171, 172] (подробное изложение имеется в [12, 95]). В частности, в этих работах показано, что (единственное) решение краевой задачи выражается через векторные потенциалы от (единственного) решения уравнения электрического поля. В этом смысле можно говорить о том, что краевая задача эквивалентно сводится к решению уравнения электрического поля.

Несмотря на большое количество разработанных и применяемых на практике численных методов решения этой задачи [4, 11, 20, 21, 22, 52, 56, 74, 83, 187], они остаются теоретически не вполне обоснованными. Для них не доказаны теоремы о сходимости, не получены оценки скорости сходимости. Основная трудность состоит в том, что, как доказано в [171], оператор уравнения не является эллиптическим, и поэтому известные результаты о сходимости проекционных методов для решения уравнений с эллиптическими операторами [6, 16] непосредственно нельзя применить. Ниже будет показано, что результаты о сходимости могут быть перенесены на специальный класс неэллиптических операторов, к которому принадлежит и оператор уравнения электрического поля.

Рассматривается численный метод Галеркина для решения интегралного уравнения на экране, основанный на специальном выборе безроторных и бездивергентных базисных и тестовых функций. Представлена теорема о сходимости метода Галеркина. Теоремы этого раздела являются математически строгими результатами о сходимости численного метода для решения уравнения на экране.

Результаты раздела опубликованы в работах [13, 55, 133–135, 170].

§1 Теоремы о сходимости методов Галеркина

Для удобства дальнейшего изложения приведем основные утверждения о сходимости методов Галеркина для уравнений с эллиптическими операторами [6, 16].

Рассмотрим приближенное решение линейных операторных уравнений с помощью проектирования их на подпространства, которые будем считать имеющими конечную размерность. Ниже все операторы предполагаются линейными.

Определение 1. Пусть X и Y – гильбертовы пространства и $A : X \rightarrow Y$ – ограниченный инъективный оператор. Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – две последовательности подпространств с условиями $\dim X_n = \dim Y_n = n$, и пусть $P_n : Y \rightarrow Y_n$ – проекционные операторы. Рассмотрим проекционный метод, образованный посредством X_n и P_n , который аппроксимирует уравнение

$$A\varphi = f \quad (1)$$

с помощью приближенного уравнения

$$P_n A\varphi_n = P_n f. \quad (2)$$

Этот проекционный метод называется сходящимся для оператора A , если существует число N такое, что для каждого $f \in \text{Im } A$ ($\text{Im } A$ – образ оператора A) приближенное уравнение (2) имеет единственное решение $\varphi_n \in X_n$ для всех $n \geq N$, и если эти решения сходятся $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$ к единственному решению φ уравнения (1).

В общем случае можно ожидать сходимость метода только тогда, когда подпространства X_n предельно плотны в X :

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad (3)$$

для всех $\varphi \in X$. Свойство (3) называют также свойством аппроксимации (произвольный элемент из X может быть аппроксимирован элементами из подпространства X_n с любой точностью в норме $\|\cdot\|$ пространства X). В последующем анализе будем всегда предполагать, что это условие выполняется.

Если проекционный метод сходится, то верна оценка скорости сходимости [6, 16]

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq M \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \quad (4)$$

для некоторой константы M . Оценка (4) называется квазиоптимальной. Она показывает, что ошибка в проекционном методе определяется тем, как хорошо точное решение может быть аппроксимировано с помощью элементов подпространств X_n в норме пространства X .

Утверждение 1 [6, 16]. *Предположим, что $A: X \rightarrow Y$ – есть ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный $A^{-1}: X \rightarrow Y$, и что проекционный метод (2) является сходящимся для A . Пусть оператор $K: X \rightarrow Y$ компактен и $A + K$ – инъективен. Тогда проекционный метод (2) сходится для оператора $A + K$.*

Для операторных уравнений в гильбертовых пространствах проекционный метод, строящийся с помощью ортопроекторов на конечномерные подпространства, приводит к методу Галеркина. Пусть $A: X \rightarrow Y$ – инъективный линейный ограниченный оператор, и пусть $P_n: Y \rightarrow Y_n$ – последовательность ортопроекторов. Тогда $\varphi_n \in X_n$ будет приближенным решением уравнения $A\varphi = f$ с помощью проекционного метода, образованного посредством выбора пространств X_n и проекторов P_n , тогда и только тогда, когда

$$(A\varphi_n, g)_Y = (f, g)_Y \quad \forall g \in Y_n, \quad (5)$$

где $(\cdot, \cdot)_Y$ скалярное произведение в Y . Уравнение (5) называют уравнением Галеркина.

Будем рассматривать случай, когда $Y = X'$, где X' – антидвойственное пространство к X (пространство антилинейных ограниченных функционалов над X) относительно некоторой ограниченной полуторалинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Замечание 1. Все результаты этого параграфа остаются в силе, если взять $Y = X$, но для уравнения электрического поля необходимо рассмотреть случай $Y = X'$.

Рассмотрим метод Галеркина, образованный с помощью подпространств $X_n \subset X$, $\varphi_n \in X_n$:

$$\langle A\varphi_n, \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X_n. \quad (6)$$

Если $J: X \rightarrow X'$ – оператор, осуществляющий изоморфизм между X и X' , то (6) эквивалентно уравнениям $(A\varphi_n, J\psi)_Y = (f, J\psi)_Y$ для любого $\psi \in X_n$ или уравнениям (5), где $(\cdot, \cdot)_Y$ – скалярное произведение в $Y = X'$, $g = J\psi$, $Y_n = JX_n$. Таким образом, метод Галеркина (6) эквивалентен методу Галеркина (5).

Определение 2. Оператор $A: X \rightarrow X'$ будем называть коэрцитивным, если существует константа $C (> 0)$ такая, что выполняется условие

$$|\langle A\varphi, \varphi \rangle| \geq C \|\varphi\|^2 \quad (7)$$

для любого $\varphi \in X$.

Замечание 2. Если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C \|\varphi\|^2 \quad (8)$$

для любого $\varphi \in X$ или условие

$$\operatorname{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C \|\varphi\|^2 \quad (9)$$

для любого $\varphi \in X$, то справедливо и (7), поэтому оператор в этих случаях также будет коэрцитивным.

Определение 3. Оператор $A: X \rightarrow X'$ будем называть эллиптическим, если существует компактный оператор $K: X \rightarrow X'$ такой, что оператор $A + K$ – коэрцитивный.

Иногда перечисленные выше неравенства записывают для оператора $A + K$, тогда они называются неравенствами Гординга.

Утверждение 2 [6, 16]. Пусть $A: X \rightarrow X'$ – коэрцитивный оператор и подпространства $X_n \subset X$ обладают свойством аппроксимации. Тогда метод Галеркина (6) сходится.

Утверждение 3 [6, 16]. Пусть $A: X \rightarrow X'$ – инъективный эллиптический оператор и подпространства $X_n \subset X$ обладают свойством аппроксимации. Тогда метод Галеркина (6) сходится.

Таким образом, для сходимости метода Галеркина для уравнения с инъективным эллиптическим оператором необходимо и достаточно выполнение условия аппроксимации и, если метод сходится, верна квазиоптимальная оценка скорости сходимости.

§2 Сходимость метода Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах

В этом параграфе представлены результаты о сходимости методов Галеркина для класса уравнений с неэллиптическими операторами. Как будет видно, они полностью аналогичны результатам о сходимости методов для уравнений с эллиптическими операторами.

Дадим определение оператора, эллиптического на подпространствах. Пусть гильбертово пространство X разложено в пря-

мую сумму m , $m \geq 1$ (замкнутых) подпространств $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_m$, а его антидвойственное пространство X' также имеет разложение $X' = X^1 \oplus \dots \oplus X^m$. Скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать отношение антидвойственности на паре пространств X и X' , а также его сужение на подпространства X_j и X^j , $j = 1, \dots, m$. Пусть линейный ограниченный оператор $A: X \rightarrow X'$ обладает свойством $A: X_j \rightarrow X^j$, $j = 1, \dots, m$. Другими словами, оператор A имеет диагональное разложение на подпространствах $X_j \rightarrow X^j$, $j = 1, \dots, m$.

Определение 4. Оператор $A: X \rightarrow X'$ будем называть коэрцитивным на подпространствах, если существуют константы $C_1, \dots, C_m (> 0)$ такие, что выполняется условие

$$|\langle A\varphi, \varphi \rangle| \geq C_j \|\varphi\|^2 \quad (10)$$

для любого $\varphi \in X_j$, $j = 1, \dots, m$.

Замечание 3. Если выполняется условие

$$\operatorname{Re} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C_j \|\varphi\|^2 \quad (11)$$

для любого $\varphi \in X_j$, $j = 1, \dots, m$, или условие

$$\operatorname{Im} \langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C \|\varphi\|^2 \quad (12)$$

для любого $\varphi \in X_j$, $j = 1, \dots, m$, то справедливо и (10), поэтому оператор в этих случаях также будет коэрцитивным на подпространствах.

Определение 5. Оператор $A: X \rightarrow X'$ будем называть эллиптическим на подпространствах, если существует компактный оператор $K: X \rightarrow X'$ такой, что оператор $A + K$ – коэрцитивный на подпространствах.

При $m = 1$ определения 4 и 5 совпадают с определениями 2 и 3 коэрцитивного и эллиптического операторов.

Легко видеть, что коэрцитивные на подпространствах и эллиптические на подпространствах операторы в общем случае не являются, соответственно, коэрцитивными и эллиптическими операторами. Простым примером может служить оператор при $m = 2$, который является положительно определенным на подпространстве X_1 и отрицательно определенным на подпространстве X_2 , т.е. $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C_1 \|\varphi\|^2$ для любого $\varphi \in X_1$ и $-\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq C_2 \|\varphi\|^2$ для любого $\varphi \in X_2$.

Теорема 1. Коэрцитивный на подпространствах оператор A имеет ограниченный обратный $A^{-1}: X' \rightarrow X$.

Доказательство. Сужение A_j оператора A на X_j есть коэрцитивный оператор $A_j: X_j \rightarrow X^j$, который, имеет ограниченный обратный $A_j^{-1}: X^j \rightarrow X_j$, поэтому уравнение $A\varphi = f$ однозначно разрешимо для любого $f \in X': f = f^1 + \dots + f^m$, $\varphi^j = A_j^{-1}f^j$, $\varphi = \varphi^1 + \dots + \varphi^m$. #

Имеет место

Следствие 1. Эллиптический на подпространствах оператор фредгольмов с индексом 0.

Смысл введения эллиптических на подпространствах операторов заключается в том, что на класс уравнений с такими операторами удается перенести результаты о сходимости метода Галеркина, справедливые для уравнений с эллиптическими операторами.

Рассмотрим уравнение

$$A\varphi = f \quad (13)$$

и n -мерные подпространства $X_n \subset X$.

Будем проводить аппроксимации φ элементами $\varphi_n \in \tilde{X}_n$, где $\tilde{X}_n = X_n^1 \oplus \dots \oplus X_n^m$ – прямая сумма ортогональных подпространств; $X_n^i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_n^i)$ – линейные оболочки векторов; $e_k = e_k^1 + \dots + e_k^m$, $e_k^i \in X_i$, а $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ – произвольный базис в X_n ($X_n \subset \tilde{X}_n$). Методом Галеркина находим φ_n из системы уравнений

$$\langle A\varphi_n, \psi \rangle = \langle f, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \tilde{X}_n. \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть A – инъективный оператор, эллиптический на подпространствах. Пусть n -мерные подпространства X_n обладают свойством аппроксимации в X . Тогда метод Галеркина (14) на подпространствах \tilde{X}_n сходится для уравнения (13) и верна квазиоптимальная оценка скорости сходимости (4).

Доказательство. В силу определения 5 оператора, эллиптического на подпространствах, и утверждения 1 достаточно доказать сходимость метода Галеркина для оператора, коэрцитивного на подпространствах. Пусть A – коэрцитивный на подпространствах оператор. #

Пусть $\varphi \in X$, $\psi \in X_n$ и, выполняется свойство аппроксимации

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

а также $\varphi_n \in \tilde{X}_n = X_n^1 \oplus \dots \oplus X_n^m$, где $X_n^i \subset X_i$. Если $\psi = \psi^1 + \dots + \psi^m$, $\varphi = \varphi^1 + \dots + \varphi^m$, $\varphi^i, \psi^i \in X_i$, то

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \|\varphi^1 - \psi^1\|^2 + \dots + \|\varphi^m - \psi^m\|^2. \quad (16)$$

Следовательно, $\|\varphi^i - \psi^i\|^2 \leq \|\varphi - \psi\|^2$. Из (15) имеем, что для любого $\varphi \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют n и $\psi \in X_n$ такие, что $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$, поэтому из (16) следует, что для любого $\varphi^j \in X_i$ существуют n и $\psi^i \in X_n^i$ такие, что $\|\varphi^i - \psi^i\| < \varepsilon$ (действительно, для этого достаточно взять $\varphi = \varphi^i$). Поэтому $\inf_{\psi^i \in X_n^i} \|\varphi^i - \psi^i\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ($i = 1, \dots, m$), т.е. подпространства X_n^i также обладают свойствами аппроксимации в X_i .

Так как оператор A имеет диагональное разложение на подпространствах $X_i \rightarrow X^i$, и сужения $A_i : X_i \rightarrow X^i$ в силу (10) являются коэрцитивными операторами, то схема метода Галеркина (14) распадается на m схем для уравнений с коэрцитивными операторами A_i ($i = 1, \dots, m$):

$$\langle A_i \varphi_n^i, \psi \rangle = \langle f^i, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X_n^i. \quad (17)$$

Следовательно, в силу утверждения 2 методы Галеркина (17) сходятся, т.е. $\|\varphi_n^i - \varphi^i\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, где φ^i удовлетворяют уравнениям

$$A_i \varphi^i = f^i, i = 1, \dots, m. \quad (18)$$

Отсюда получаем, что $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$; $\varphi = \varphi^1 + \dots + \varphi^m$, $\varphi_n = \varphi_n^1 + \dots + \varphi_n^m$. Таким образом, сходимость метода Галеркина доказана. Квазиоптимальная оценка скорости сходимости (4) следует из сходимости метода Галеркина.

§3 Метод Галеркина для уравнения электрического поля

В работах [95, 171] было доказано, что задача дифракции электромагнитной волны на экране Ω эквивалентно сводится к решению интегродифференциального уравнения электрического поля (которое в [95, 171] рассматривается как псевдодифференциальное)

$$\operatorname{grad}_\tau A(\operatorname{div} u) + k^2 A_\tau u = f; \quad x \in \Omega; \quad (19)$$

$$Au = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds, \quad A_{\tau} u := (Au)_{\tau}; \quad (20)$$

$$f = 4\pi ik E_{\tau}^0 \Big|_{\Omega}; \quad f \in C^{\infty}(\bar{\Omega}). \quad (21)$$

Здесь

$$\text{grad}_{\tau} := \text{grad}_x - v(x)(v(x) \cdot \text{grad}_x); \quad (22)$$

$$(Au)_{\tau}(x) := (Au)(x) - v(x)(v(x) \cdot (Au)(x)); \quad (23)$$

$$E_{\tau}^0(x) := E^0(x) - v(x)(v(x) \cdot E^0(x)), \quad (24)$$

где grad_x – обычная операция градиента в R^3 , а $v(x)$ – нормаль к поверхности в точке x .

Перейдем к рассмотрению оператора, определяемого левой частью формулы (19)

$$Lu := \text{grad}_{\tau} A(\text{div } u) + k^2 A_{\tau} u. \quad (25)$$

В работах [95, 171] доказано, что $L : W \rightarrow W'$ – непрерывно обратимый оператор.

Для оператора L имеем

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $L_{ij} : W_i \rightarrow W_j$ – ограниченные операторы. Нормы на W_i и W^j индуцированы нормами на W и W' .

Имеет место матричное представление для L в виде

$$L = L^1 + L^2 \equiv \begin{pmatrix} k^2 L_1^{(1)} & 0 \\ 0 & -L_2^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где операторы K_{ij} компактны, квадратичная форма оператора $L_1^{(1)}$ положительно определена на W_1 :

$$\langle L_1^{(1)} u, u \rangle \geq C_1 \|u\|_W^2, \quad u \in W_1,$$

а квадратичная форма оператора $L_2^{(1)}$ положительно определена на W_2 :

$$\langle L_2^{(1)} u, u \rangle \geq C_2 \|u\|_W^2, \quad u \in W_2.$$

Теорема 3. Оператор $L = L(k) : W \rightarrow W'$ является инъективным и эллиптическим на подпространствах при $k \neq 0$.

Замечание 4. При $k = 0$ оператор $L(0)$ не будет фредгольмовым (а, следовательно, и эллиптическим на подпространствах), т.к. $W_1 \subset \ker L^1$, $\dim W_1 = \infty$.

Замечание 5. Матричное разложение оператора L^1 в (27) показывает, что «главная часть» оператора L (оператор L^1) не будет положительно-определенным или отрицательно-определенным оператором при $\operatorname{Re} k \neq 0$, однако L^1 коэрцитивен при $\operatorname{Im} k \neq 0$:

$$|\langle L^1 u, u \rangle| \geq C \|u\|_W^2, \quad u \in W.$$

При $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$, оператор L^1 , очевидно, коэрцитивным не будет.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. При $k \neq 0$ метод Галеркина для оператора $L = L(k) : W \rightarrow W'$ сходится.

§4 Свойство аппроксимации подпространств базисных функций Рао-Уилтона-Глиссона

В качестве приложения полученных результатов докажем сходимость метода Галеркина (14) для решения уравнения электрического поля, основанного на выборе базисных функций RWG, т.е. функций Рао-Уилтона-Глиссона [29]. В электродинамике за этими функциями закрепилось название функций Рао-Уилтона-Глиссона, хотя они были введены раньше в работе [30] и подробно исследованы в фундаментальной статье [25] (где рассмотрены свойства и других аналогичных функций более высокого порядка, но не в пространстве W). Как следует из теоремы 4, для доказательства сходимости метода Галеркина решения уравнения электрического поля и получения оценок скорости сходимости необходимо доказать свойство аппроксимации любой функции из пространства W функциями Рао-Уилтона-Глиссона. Будем рассматривать случай, когда экран представляет собой прямоугольник $\Omega = \Pi := [0, a] \times [0, b]$, и выберем в прямоугольнике Π равномерную прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2 по осям x и y с узлами $M_{ij} = (x_i, y_j)$, $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$ ($i = 0, \dots, N_1$, $j = 0, \dots, N_2$), $h_1 = \frac{a}{N_1}$, $h_2 = \frac{b}{N_2}$.

Рассмотрим вопрос об аппроксимации в прямоугольнике Π непрерывно-дифференцируемой (векторной) функции

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad f \in C^1(\Pi) \quad (f_1 \in C^1(\Pi), f_2 \in C^1(\Pi)),$$

удовлетворяющей условиям

$$f_1|_{x=0} = f_1|_{x=a} = 0, \quad f_2|_{y=0} = f_2|_{y=b} = 0, \quad (28)$$

базисными функциями $\varphi_j(x, y)$ по методу Рао-Уилтона-Глиссона.

Функции Рао-Уилтона-Глиссона ассоциированы с ребрами («реберные функции») – каждому ребру отвечает одна функция, которая отлична от нуля только в двух треугольниках, имеющих это ребро своей стороной. Пусть треугольники T_j^+ и T_j^- имеют общую сторону – ребро с номером j , а $(x_1^{(j)}, y_1^{(j)})$ и $(x_2^{(j)}, y_2^{(j)})$ – вершины треугольников T_j^+ и T_j^- , соответственно, не принадлежащие ребру j . Базисную функцию $\varphi_j(x, y)$, отвечающую ребру j , определим по правилу:

$$\varphi_j(x, y) = \begin{cases} \left(x - x_1^{(j)}, y - y_1^{(j)} \right) \frac{l_j}{2S_j^+}, & (x, y) \in T_j^+, \\ \left(x_2^{(j)} - x, y_2^{(j)} - y \right) \frac{l_j}{2S_j^-}, & (x, y) \in T_j^-, \end{cases} \quad (29)$$

и $\varphi_j \equiv 0$ вне треугольников T_j^+ , T_j^- . Здесь l_j – длина j -го ребра; S_j^\pm – площадь треугольников T_j^\pm ; C_j – середина ребра с номером j .

Нормирование функций $\varphi_j(x, y)$ выполнено так, что нормальная составляющая (к ребру) этих функций в середине ребра равна 1, т.е. $(\varphi_j)_n(C_j) = 1$. Отметим важное свойство функций φ_j : их нормальные составляющие на границе ∂T_j носителя $T_j = T_j^+ \cup T_j^-$ равны нулю, $(\varphi_j)_n|_{\partial T_j} = 0$.

Пусть

$$\phi(x, y) = \sum_j \alpha_j \varphi_j(x, y), \quad \phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)),$$

тогда коэффициент α_j равен нормальной составляющей функции ϕ в середине ребра: $\alpha_j = \phi_n(C_j)$. Будем аппроксимировать функ-

цию $f(x, y)$ функцией $\phi(x, y)$, выбирая коэффициенты α_j из условия $f_n(C_j) = \phi_n(C_j)$, т.е. $\phi(x, y) = \sum_j f_n(C_j) \phi_j(x, y)$. Оценим разность $|f_i(x, y) - \phi_i(x, y)|$ в прямоугольнике Π ; $i = 1, 2$. Рассмотрим разность $|f_1(x, y) - \phi_1(x, y)|$ для первых компонент (для вторых компонент разность оценивается аналогично). Пусть C_k – середина вертикального ребра с номером k , ближайшая к точке $(x, y) \in \Pi$. Если точка C_k не единственная ближайшая, то можно взять любую из них.

Обозначим через $\omega(g, \delta, \eta)$ модуль непрерывности функции g в прямоугольнике Π :

$$\omega(g, \delta, \eta) := \sup \left\{ |g(x', y') - g(x'', y'')| : |x' - x''| \leq \delta, |y' - y''| \leq \eta \right\}.$$

Рассмотрим один из треугольников T сетки, например ΔPQR , где $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, причем $x_3 = x_1$, $y_3 = y_2$, $x_2 = x_1 + h_1$, $y_2 = y_1 + h_2$. Пусть ребра PR , PQ , RQ имеют номера i, j, k , соответственно, а точки A_i, B_j, C_k – середины этих ребер.

Нормали в этих точках имеют координаты:

$$\mathbf{n}(A_i) = (1, 0), \quad \mathbf{n}(C_k) = (0, 1), \quad \mathbf{n}(B_j) = \left(\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \frac{-h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right).$$

Оценим разность функций f и ϕ в точке (x, y) при условии, что она принадлежит треугольнику PQR ; $(x, y) \in \Delta PQR$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) - \phi(x, y) &= f(x, y) - \\ &- (f_1(A_i)\phi_i(x, y) + f_2(C_k)\phi_k(x, y) + f_n(B_j)\phi_j(x, y)) = \\ &= f(x, y) - h_1^{-1}f_1(A_i)\phi_i(x_2 - x, y_2 - y)^T - h_2^{-1}f_2(C_k)\phi_k(x - x_1, y - y_1)^T - \\ &- (h_1^{-1}f_1(B_j) - h_2^{-1}f_2(B_j))(x - x_3, y - y_3)^T, \end{aligned}$$

откуда по координатно имеем

$$\begin{aligned} f_1(x, y) - \phi_1(x, y) &= f_1(x, y) - \Theta_1 f_1(A_i) - (1 - \Theta_1) f_1(B_j) + \\ &+ \frac{x_1 - x}{h_2} (f_2(C_k) - f_2(B_j)), \end{aligned}$$

$$f_2(x, y) - \phi_2(x, y) = f_2(x, y) - \Theta_2 f_2(B_j) - (1 - \Theta_2) f_2(C_k) + \\ + \frac{y - y_2}{h_1} (f_1(A_i) - f_1(B_j)),$$

где $\Theta_1 := h_1^{-1}(x_2 - x)$, $\Theta_2 := h_2^{-1}(y_2 - y)$, $0 \leq \Theta_1 \leq 1$, $0 \leq \Theta_2 \leq 1$.

Учитывая, что непрерывная в \bar{T} функция достигает любого своего промежуточного значения в некоторой точке из \bar{T} , получаем, следующее:

$$|f_1(x, y) - \phi_1(x, y)| \leq \omega\left(f_1, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \frac{h_1}{h_2} \omega\left(f_2, 0, \frac{h_2}{2}\right); \\ |f_2(x, y) - \phi_2(x, y)| \leq \omega\left(f_2, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \frac{h_2}{h_1} \omega\left(f_1, \frac{h_1}{2}, 0\right).$$

Если $\frac{h_1}{h_2} \leq M$ и $\frac{h_2}{h_1} \leq M$ ($M \geq 1$), то легко получить более грубую оценку:

$$|f_m(x, y) - \phi_m(x, y)| \leq M \left(\omega\left(f_1, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \omega\left(f_2, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) \right), m = 1, 2. \quad (30)$$

Заметим, что в силу условия (28) граничные ребра в вышеприведенных оценках фигурируют лишь формально с коэффициентом 0 перед соответствующей базисной функцией.

Случай принадлежности точки (x, y) одному из ребер PR, PQ, RQ также не исключается. Аналогично рассматривается вторая возможная конфигурация, когда $x_3 = x_2$, $y_3 = y_1$.

Таким образом, в силу произвольности выбора точки $(x, y) \in \bar{\Pi}$ и равномерности оценки (30) оценка (30) имеет место для всех точек $(x, y) \in \bar{\Pi}$.

Пусть снова $(x, y) \in PQR$. Оценим разность функций $\operatorname{div} f$ и $\operatorname{div} \phi$, пользуясь полученными результатами. Имеем

$$\operatorname{div} f - \operatorname{div} \phi = \operatorname{div} f - \\ - 2(-h_1^{-1} f_1(A_i) + h_2^{-1} f_2(C_k) + h_1^{-1} f_1(B_j) - h_2^{-1} f_2(B_j)) = \\ = \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{f_1(B_j) - f_1(A_i)}{h_1/2} + \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{f_2(C_k) - f_2(B_j)}{h_2/2} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{B_j} \right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{B_j} - \frac{f_1(B_j) - f_1(A_i)}{h_1/2} \right) + \\ + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{B_j} \right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{B_j} - \frac{f_2(C_k) - f_2(B_j)}{h_2/2} \right),$$

причем $|A_i B_j| = h_1/2$, $|B_j C_k| = h_2/2$. Далее находим, учитывая непрерывную дифференцируемость функций f_1 и f_2 в $\bar{\Pi}$, неравенство

$$|\operatorname{div} f - \operatorname{div} \phi| \leq \omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) + \omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{h_1}{2}, 0 \right) + \\ + \omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) + \omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}, 0, \frac{h_2}{2} \right).$$

Отсюда легко получить более грубую оценку

$$|\operatorname{div} f - \operatorname{div} \phi| \leq 2 \left(\omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) + \omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) \right), \quad (31)$$

которая равномерна и имеет место для всех $(x, y) \in \bar{\Pi}$.

Оценки (30) и (31) позволяют доказать теорему об аппроксимации элементов $\varphi \in W$ базисными функциями φ_j . Пусть в прямоугольнике Π выбрана равномерная прямоугольная сетка с шагом h_1 по переменной x , и шагом h_2 по переменной y . Рассмотрим конечномерное подпространство $X_N = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$, являющееся линейной оболочкой базисных функций φ_j , $j = 1, \dots, N$, где N – количество внутренних ребер сетки. Нетрудно проверить, что $\varphi_j \in W(\Pi)$, $X_N \subset W$. Имеет место следующий результат.

Теорема 5. *Пусть $\frac{h_1}{h_2} \leq M$ и $\frac{h_2}{h_1} \leq M$ для некоторого M . Тогда для любого $\varphi \in W$ имеем*

$$\inf_{\psi \in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Если дополнительно $\varphi \in W \cap C^2(\bar{\Pi})$, то верна оценка

$$\inf_{\psi \in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \leq C_0 \|\varphi\|_{C^2(\bar{\Pi})} (h_1 + h_2), \quad (32)$$

где C_0 не зависит от φ , h_1 и h_2 .

Доказательство. Пусть $\varphi \in W \cap C^2(\bar{\Pi})$, и ϕ_N – функция, аппроксимирующая f . Выберем ϕ_N следующим образом:

$$\phi_N = \sum_{j=1}^N f_n(C_j) \vec{\phi}_j,$$

где C_j – середина j -го ребра, f_n – нормальная составляющая к ребру функции f . Так как вложение $L_p(\Pi) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Pi})$ непрерывно при $\frac{4}{3} < p < 2$ [186], то $\|g\|_{-1/2} \leq C \|g\|_p$, $g \in L_p(\Pi)$. Но $\|g\|_p \leq \text{mes}^{\frac{1}{p}} \Pi \|g\|_C$, если $g \in C(\bar{\Pi})$. Поэтому для векторной функции u имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_W &\leq C \text{mes}^{\frac{1}{p}} \Pi \left(\|u_1\|_C^2 + \|u_2\|_C^2 + \|\operatorname{div} u\|_C^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C\sqrt{3} \text{mes}^{\frac{1}{p}} \Pi \max \left(\|u_1\|_C, \|u_2\|_C, \|\operatorname{div} u\|_C \right). \end{aligned}$$

Положим $C_1 := C\sqrt{3} \text{mes}^{\frac{1}{p}} \Pi \max(M, 2)$. В силу оценок (30) и (31) получаем

$$\begin{aligned} \|f - \phi_N\|_W &\leq C_1 \left[\sum_{i=1}^2 \omega \left(f_i, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) + \omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) + \omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2} \right) \right] \leq \\ &\leq C_2 (h_1 + h_2), \end{aligned}$$

так как f любое число раз непрерывно дифференцируемо в $\bar{\Pi}$. В качестве C_2 можно взять

$$C_2 := C_1 \max_{\substack{|\alpha|=k \\ 1 \leq k \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 1}} \max_{M \in \bar{\Pi}} |D_\alpha^k f_j|,$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – мультииндекс, $D_\alpha^k = \frac{\partial^k}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$. Тогда для получения оценки (32) достаточно выбрать $f = \varphi$, $C_0 = C_2$. Заметим, что из условия $f \in W \cap C^2(\bar{\Pi})$ следует условие (28).

Так как $C_0^\infty(\Pi)$ плотно в $W(\Pi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ выберем элемент $f \in C_0^\infty(\Pi)$ такой, что $\|\varphi - f\|_W \leq \varepsilon/2$. Тогда выполняется неравенство

$$\|\varphi - \phi_N\|_W \leq \|\varphi - f\|_W + \|f - \phi_N\|_W \leq \varepsilon/2 + \|f - \phi_N\|_W,$$

где ϕ_N – функция, аппроксимирующая f . Теперь для доказательства утверждения теоремы достаточно воспользоваться доказанной выше оценкой

$$\|f - \phi_N\|_W \leq C_0 \|f\|_{C^2(\bar{\Pi})} (h_1 + h_2), \quad (33)$$

для функции f , т.к. тогда правую часть (33) легко сделать меньше $\varepsilon/2$ за счет уменьшения $h_1 + h_2$. #

Из теорем 2 и 3 и утверждения 3 получаем сходимость метода Галеркина (14) с базисными функциями Рао-Уилтона-Глиссона с квазиоптимальной оценкой скорости сходимости (4). Точнее, верна

Теорема 6. Пусть $\frac{h_1}{h_2} \leq M$, $\frac{h_2}{h_1} \leq M$ для некоторого M . Тогда

метод Галеркина (14) для уравнения электрического поля (19) сходится с выбором базисных функций Рао-Уилтона-Глиссона и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u - u_N\|_W \leq C_0 \inf_{\psi \in X_N} \|\psi - u\|_W, \quad (34)$$

где u, u_N – точное и приближенные решения, а константа C_0 не зависит от h_1 и h_2 .

§5 Метод Галеркина с безроторными и бездивергентными базисными функциями

Рассмотренная выше теория позволяет построить и обосновать новый численный метод Галеркина для решения уравнения $Lu = f$. Рассмотрим n -мерное подпространство $V_n \subset W$ и будем аппроксимировать u элементами $u_n \in V_n$. Согласно методу Галеркина u_n находятся как решения уравнений

$$(Lu_n, v) = (f, v) \text{ для любых } v \in V_n. \quad (35)$$

Основная трудность при решении уравнения заключается в том, что оператор L не является эллиптическим, поэтому не применимы известные результаты о сходимости проекционных методов [16]. Однако мы имеем возможность построить специальный метод Галеркина с выбором безроторных и бездивергентных базисных и тестовых функций и доказать его сходимость, используя структуру главной части псевдодифференциального оператора L [13].

Теорема 8. Пусть n -мерные подпространства

$$V_n^1 \subset W_1 \text{ и } V_n^2 \subset W_2$$

обладают свойством аппроксимации в W_1 и W_2 , соответственно. Тогда метод Галеркина (35) на подпространствах $V_n := V_n^1 + V_n^2$ сходится.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Рассмотрим разложение для оператора L (27). Поскольку операторы L^1 и L ограничены и непрерывно обратимы, а оператор L^2 компактен, то для доказательства сходимости метода Галеркина для оператора L достаточно доказать сходимость этого метода для оператора L^1 [16]. Но сужения оператора L^1 на подпространства W_1 и W_2 являются непрерывно обратимыми (при $k \neq 0$) операторами $k^2 L_1^{(1)}$ и $-L_2^{(1)}$, соответственно. Поэтому метод Галеркина сходится для них на подпространствах W_1 и W_2 , а следовательно, и для оператора L^1 на W .

Глава 2. Метод объемных интегральных уравнений

Раздел 1. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в резонаторе

Раздел посвящен исследованию задачи дифракции стороннего электромагнитного поля на локально неоднородном теле, помещенном в идеально проводящий параллелепипед. Актуальность работы определяется применением результатов исследования, например при решении задач дифракции в СВЧ-печах и на биологических объектах. Для численного решения задачи возможно использование метода конечных элементов. Однако прямое применение метода конечных элементов встречает ряд трудностей. Во-первых, краевая задача для системы уравнений Максвелла не является эллиптической, поэтому «не работают» стандартные схемы доказательства сходимости проекционных методов [16]. Во-вторых, для получения приемлемой точности расчета поля в теле необходимо выбирать достаточно мелкую сетку, что влечет также выбор мелкой сетки и в объеме вне тела (выбор же сетки разного масштаба внутри и вне тела ведет к серьезным вычислительным трудностям). А это, в свою очередь, учитывая трехмерный векторный характер задачи, приводит к разреженным матрицам больших порядков в методе конечных элементов.

От этих недостатков свободен метод объемных сингулярных интегральных уравнений [156]. Здесь оператор получается эллиптическим, а интегральное уравнение решается только внутри тела (в области неоднородности). В отличие от [156], мы изучаем интегральное уравнение, опираясь, в основном, на результаты исследования соответствующей краевой задачи [59] и теорему эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. На этом пути удается доказать теорему о существовании и единственности решений в L_2 интегрального уравнения, сходимость численного метода Галеркина, получить некоторые результаты о гладкости решений.

Несмотря на то, что результаты изучения задач в разделах 1–3 этой главы во многом схожи, мы сформулировали их в каждом разделе для удобства читателя. Разумеется, тензоры Грина используются разные, поэтому формулы имеют, вообще говоря, разный смысл.

Результаты раздела опубликованы в [132, 181–183].

§1 Краевая задача для системы уравнений Максвелла

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c\}$ – резонатор с идеально проводящей поверхностью ∂P . В резонаторе расположено объемное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3 -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области \bar{Q} , $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Точнее, следуя [59], предположим, что для каждой точки границы $x_0 \in \partial Q$ существует окрестность Θ (в R^3) и C^2 -дiffeоморфизм этой окрестности на R^3 , при котором точка x_0 переходит в точку 0, а образом множества $\Theta \cap Q$ является множество одного из следующих типов (ниже (x_1, x_2, x_3) – декартовы; (r, θ) , $r \geq 0$, $\theta \in S^2$ – сферические координаты в R^3). Либо $x_1 > 0$ (x_0 – точка гладкости границы); либо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ (x_0 – точка на «выходящем» ребре); либо $R^3 \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ (x_0 – точка на «входящем» ребре); либо $r > 0, \theta \in Q'$, где $Q' \subset S^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q'$ (x_0 – вершина «конуса с ребрами»). В частности, если $\partial Q'$ – гладкая, то x_0 – коническая точка; если $\partial Q'$ образована дугами больших окружностей, то x_0 – вершина многогранного угла. Пусть Q – ограниченная область, и каждая точка $x \in \partial Q$ принадлежит одному из этих типов. Тогда будем говорить, что Q – область с кусочно-гладкой границей. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок резонатора, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В $P \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными $\epsilon_0 (> 0)$, $\mu_0 (> 0)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(P)$, возбуждаемое в резонаторе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_2(P)$. В области $P \subset R^3$ стандартные дифференциальные операторы grad , div , rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла (ниже понятие решения будет уточнено):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \tag{1}$$

Сформулируем обобщенные краевые условия на границе ∂P . Если u – достаточно гладкое векторное поле в P , то через $\gamma_v u$, $\gamma_\tau u$ будем обозначать нормальную и касательную составляющие поля u на ∂P . В негладком случае дадим определение для равенств $\gamma_v u = 0$, $\gamma_\tau u = 0$. Пусть $u \in L_2(P; C^3)$. Тогда если $\operatorname{div} u \in L_2(P)$, то $\gamma_v u = 0$ означает, что

$$(u, \operatorname{grad} v) = -(\operatorname{div} u, v) \quad \forall v \in H^1(P); \quad (2)$$

если $\operatorname{rot} u \in L_2(P)$, то $\gamma_\tau u = 0$ означает, что

$$(u, \operatorname{rot} w) = (\operatorname{rot} u, w) \quad \forall w \in L_2(P): \operatorname{rot} w \in L_2(P); \quad (3)$$

где $H^1(P)$ пространство Соболева.

Обозначим

$$u_\tau|_{\partial P} := \gamma_\tau u, \quad u_v|_{\partial P} := \gamma_v u.$$

Для \mathbf{E} , \mathbf{H} должны выполняться краевые условия на стенках резонатора:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_v|_{\partial P} = 0. \quad (4)$$

Если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие в (4) следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для $u \in H^1(P)$ существуют граничные значения из пространства $H^{1/2}(\partial P)$ в смысле теории следов. Почти везде на ∂P определен вектор нормали. Поэтому можно говорить о равенствах следов $\gamma_v u = 0$, $\gamma_\tau u = 0$, что будет равносильно этим равенствам в смысле данного выше определения.

Пусть также \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\epsilon}(x) = \epsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ (\hat{I} – единичный тензор):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}^0 \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_v^0|_{\partial P} = 0. \quad (6)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через \mathbf{j}_E^0 с помощью введенного в §2 тензора Грина прямоугольного параллелепипеда. Ниже нам понадобятся результаты исследования оператора Максвелла в L_2 [59].

Через $H_0^1(P)$ обозначим замыкание в H^1 класса $C_0^\infty(P)$. В скалярном и векторном случаях мы используем одинаковые обозначения.

В $L_2(P; C^3)$ рассмотрим подпространства:

$$G_0 = G_0(P) = \{\text{grad } \phi : \phi \in H_0^1(P)\}, \quad G_1 = G_1(P) = \{\text{grad } \phi : \phi \in H^1(P)\}.$$

Через $\hat{\varepsilon}$ будем также обозначать ограниченный в $L_2(P; C^3)$ оператор умножения на матрицу $\hat{\varepsilon}(x)$. В $L_2(P; C^3)$ введем новое скалярное произведение $(\hat{\varepsilon} \cdot, \cdot)$; оно порождает норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|$. Возникающее при этом гильбертово пространство обозначим через $L_2(\varepsilon) = L_2(P; C^3, \hat{\varepsilon})$. Алгебраически и топологически пространства $L_2(P; C^3, \hat{\varepsilon})$ при разных $\hat{\varepsilon}$ совпадают.

«Сolenоидальные» подпространства $J_{0,\varepsilon}$, $J_{1,\varepsilon}$ вводятся с помощью ортогонального разложения (разложения Вейля):

$$L_2(\varepsilon) = G_0 \oplus_{\varepsilon} J_{0,\varepsilon}, \quad L_2(\varepsilon) = G_1 \oplus_{\varepsilon} J_{1,\varepsilon}. \quad (7)$$

Если $\hat{\varepsilon}(x) = \hat{I}$, будем опускать индекс ε .

Отметим, что если $\phi \in H_0^1(P)$, то $\gamma_\tau(\text{grad } \phi) = 0$. Если $u \in J_{1,\varepsilon}$, то $\gamma_v(\hat{\varepsilon}u) = 0$.

Рассмотрим класс векторных полей:

$$F_\varepsilon = \{u \in L_2(P) : \text{div}(\hat{\varepsilon}u) \in L_2(P); \text{rot } u \in L_2(P)\}.$$

Относительно обычных линейных операций и скалярного произведения, определяемого нормой

$$\|u\|_{F_\varepsilon} = \|\text{rot } u\|^2 + \|\text{div}(\hat{\varepsilon}u)\|^2 + \|u\|_{L_2(\varepsilon)}^2, \quad (8)$$

класс F_ε представляет собой полное гильбертово пространство. В F_ε выделяются *замкнутые* (относительно нормы (8)) подпространства:

$$F_{0,\varepsilon} = \{u \in F_\varepsilon : \gamma_\tau u = 0\}, \quad F_{1,\varepsilon} = \{u \in F_\varepsilon : \gamma_v(\hat{\varepsilon}u) = 0\}.$$

Обозначим $\Phi_{0,\varepsilon} = F_{0,\varepsilon} \cap J_{0,\varepsilon}$, $\Phi_{1,\varepsilon} = F_{1,\varepsilon} \cap J_{1,\varepsilon}$.

Через l обозначим блочно-диагональную 6×6 -матрицу с блоками $\hat{\varepsilon}$, $\mu_0 \hat{I}$. Пространство $L_2(P; C^6, l)$ со скалярным произведением $(l \cdot, \cdot)$ представим в виде

$$L_2(l) = L_2(P; C^3, \varepsilon) \oplus L_2(P; C^3, \mu_0). \quad (9)$$

Другое разложение для $L_2(l)$ порождается разложениями (7).

Пусть

$$G = G_0 \oplus_l G_1, J_l = J_{0,\varepsilon} \oplus_l J_1. \quad (10)$$

Тогда

$$L_2(l) = J_l \oplus G. \quad (11)$$

В пространстве $L_2(P; C^3)$ рассмотрим операторы \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_0 , задаваемые выражением rot на областях определения:

$$\text{Dom } \mathfrak{R}_1 = \{u \in L_2(P) : \text{rot } u \in L_2(P)\},$$

$$\text{Dom } \mathfrak{R}_0 = \{u \in \text{Dom } \mathfrak{R}_1 : \gamma_\tau u = 0\}.$$

Лемма 1 [59]. *В пространстве $L_2(l)$ самосопряжен блочный (относительно разложения (9)) оператор:*

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & i\bar{\varepsilon}^{-1}\mathfrak{R}_1 \\ -i\mu_0^{-1}\mathfrak{R}_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Так как $G \subset \text{Ker } M_l$, то разложение (11) приводит [106] оператор (12). Обозначим через M_l его часть, действующую в J_l .

Имеет место следующее описание оператора M_l . Рассмотрим операторы

$$R_{0,l}u = \mu_0^{-1}\text{rot } u, \text{Dom } R_{0,l} = \Phi_{0,1},$$

$$R_{1,l}u = \bar{\varepsilon}^{-1}\text{rot } u, \text{Dom } R_{1,l} = \Phi_{1,1}.$$

Блочный относительно разложения (10) оператор

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & iR_{1,l} \\ -iR_{0,l} & 0 \end{pmatrix}$$

самосопряжен в J_l и совпадает с действующей в J_l частью оператора M_l .

Лемма 2 [59]. *Спектр $\sigma(M_l)$ оператора M_l дискретен.*

Дискретность спектра самосопряженного оператора равносильна компактности его резольвенты [106]. Пусть $\sigma(M_l) = \sigma(M_l) \cup \{0\}$ – спектр M_l .

Теперь мы можем рассмотреть вопрос о разрешимости краевой задачи (1), (4). Запишем эту систему в виде

$$M_l = u = \omega u + j^0, \quad u := (\mathbf{E}, \mathbf{H})^T, \quad j^0 := (i\bar{\varepsilon}^{-1}J_E^0, 0)^T.$$

Пусть $j^0 = j_0 \oplus_l j_1$, $u = u_0 \oplus_l u_1$. Тогда получаем

$$M_l u_0 = \omega u_0 + j_0, \quad \omega u_1 + j_1 = 0.$$

Отсюда следует

Утверждение 1. При $\omega \notin \sigma(M_l)$ краевая задача для системы уравнений Максвелла (1), (4) имеет единственное решение $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(P)$ при любом $\mathbf{j}_E^0 \in L_2(P)$.

Аналогично, пусть $\sigma(M_l^0) = \sigma(M_1) \cup \{0\}$ – спектр M_l^0 оператора при $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$ всюду в P . Тогда верно

Утверждение 2. При $\omega \notin \sigma(M_l^0)$ краевая задача для системы уравнений Максвелла (5), (6) имеет единственное решение $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \in L_2(P)$ при любом $\mathbf{j}_E^0 \in L_2(P)$;

$$\sigma(M_l^0) = \left\{ \lambda_{nmk} : \lambda_{nmk}^2 = \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c} \right)^2, \quad n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0 \right\}.$$

Имеют место результаты о гладкости решений задач (5), (6) и (1), (4) при более гладких данных [59]. Сформулируем один из таких результатов.

Утверждение 3. Пусть $\mathbf{j}_E^0 \in H^1(P)$. Тогда $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \in H^1(P)$. Пусть, кроме того, $\partial Q \in C^2$, $\hat{\varepsilon} \in C^1(\bar{Q})$. Тогда сужения $\mathbf{E}|_Q, \mathbf{H}|_Q \in H^1(Q)$ и $\mathbf{E}|_{P \setminus Q}, \mathbf{H}|_{P \setminus Q} \in H^1(P \setminus Q)$. Кроме того, справедливы условия сопряжения на ∂Q :

$$[\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau]_{\partial Q} = 0,$$

где $[\cdot]$ означает разность следов с разных сторон ∂Q .

В предположениях утверждения 3 краевые условия на ∂P и условия сопряжения на ∂Q понимаются в смысле равенства следов элементов из $H^{1/2}(\partial P)$ и $H^{1/2}(\partial Q)$. Ясно, что при первоначальных общих предположениях о тензоре $\hat{\varepsilon}$ такие условия сопряжения не имеют смысла.

§2 Тензорная функция Грина прямоугольного резонатора

Построим диагональный тензор Грина \hat{G}_E , компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в P с коэффициентом $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ и удовлетворяют краевым усло-

виям первого или второго рода на ∂P , обеспечивающим обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках резонатора. Его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(1+\delta_{0n})}{ab\gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm}c)} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi m}{b} y_2 \begin{cases} \operatorname{sh} \gamma_{nm} x_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - y_3), x_3 < y_3 \\ \operatorname{sh} \gamma_{nm} y_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - x_3), x_3 > y_3; \end{cases} \\ G_E^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(1+\delta_{0m})}{ab\gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm}c)} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \times \\ &\quad \times \cos \frac{\pi m}{b} y_2 \begin{cases} \operatorname{sh} \gamma_{nm} x_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - y_3), x_3 < y_3 \\ \operatorname{sh} \gamma_{nm} y_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - x_3), x_3 > y_3; \end{cases} \\ G_E^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{ab\gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm}c)} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi m}{b} y_2 \begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_{nm} x_3 \operatorname{ch} \gamma_{nm} (c - y_3), x_3 < y_3 \\ \operatorname{ch} \gamma_{nm} y_3 \operatorname{ch} \gamma_{nm} (c - x_3), x_3 > y_3. \end{cases} \end{aligned}$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\operatorname{Im} \gamma_{nm} \geq 0$.

Запишем G_E^1 с выделенной особенностью при $x = y$:

$$G_E^1 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^1(x, y), \quad x, y \in P,$$

где функция $g^1 \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ [95, с. 132]. Аналогичные представления справедливы и для функций G_E^2 , G_E^3 . Отсюда и в силу симметрии функций Грина $G_E^m(x, y) = G_E^m(y, x)$ ($m = 1, 2, 3$) имеем

Утверждение 4. Тензор Грина \hat{G}_E допускает представление

$$\hat{G}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P,$$

где матрица-функция (тензор) $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ и $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$.

Такое представление функции Грина удобно для теоретического исследования задачи дифракции, но непригодно для численных расчетов, т.к. не содержит алгоритма вычисления \hat{g} . В работах

[95,182] изложен и протестирован конструктивный метод выделения особенности, позволяющий корректно вычислять значения функции Грина вблизи особых точек.

Отметим, что функции Грина имеют единственную особенность вида $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}$ и не имеют других особенностей в силу сделанного нами предположения о том, что тело не касается поверхности резонатора.

§3 Объемное сингулярное интегральное уравнение

Наша ближайшая цель – свести краевую задачу к объемному сингулярному интегральному уравнению и доказать теорему эквивалентности.

Пусть $\omega \notin \sigma(M_l^0) \cup \sigma(M_l)$. Тогда решения краевых задач (1)–(4) и (5)–(6) существуют и единственны. Перепишем (1) в эквивалентной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_E, \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^0 + \mathbf{j}_E^p.$$

В последнем равенстве $\mathbf{j}_E^p = -i\omega(\hat{\epsilon}(x) - \epsilon_0 \hat{I}) \mathbf{E}$ – электрический ток поляризации.

Нетрудно проверить, что решение краевой задачи (4), (13) имеет вид

$$\mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_E, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_E, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{A}_E = \int_P \hat{G}_E(r) \mathbf{j}_E(y) dy - \quad (15)$$

векторный потенциал электрического тока. Потенциал \mathbf{A}_E удовлетворяет уравнению $\Delta \mathbf{A}_E + k_0^2 \mathbf{A}_E = -\mathbf{j}_E$. Таким образом, потенциал \mathbf{A}_E есть свертка с тензором Грина прямоугольного резонатора для уравнения Гельмгольца, обеспечивающего выполнение требуемых краевых условий для полей.

Однако формулы (14) не дают явного решения задачи (4), (13), т.к. ток \mathbf{j}_E зависит от \mathbf{E} . Из соотношений (13)–(15) для поля \mathbf{E} следует интегродифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q.\end{aligned}\quad (16)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q.\end{aligned}\quad (17)$$

Формула (17) дает представление решения $\mathbf{E}(x)$ в области $P \setminus Q$, если $\mathbf{E}(y)$, $y \in Q$ – решение уравнения (16). Поле \mathbf{H} выражается через решение (16) в виде

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^0(x) - i\omega \epsilon_0 \operatorname{rot} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P.$$

Сведем полученное выше интегродифференциальное уравнение к объемному векторному сингулярному интегральному уравнению [138, 139].

Представим функцию Грина в виде

$$\begin{aligned}\hat{G}_E(r) &= \hat{G}_0(r) + \hat{G}_1(r) + \hat{G}_2(r), \quad r = |x - y|; \\ \hat{G}_0(r) &= \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r} \cdot \hat{I}, \quad \hat{G}_1(r) = \frac{1}{4\pi r} \cdot \hat{I}, \quad \hat{G}_2(r) = \operatorname{diag}\{g^1, g^2, g^3\}.\end{aligned}$$

Пусть $\alpha = \frac{y-x}{r}$. Сформулируем важное утверждение о дифференцировании интегральных операторов, ядро которых имеет особенность порядка $1/r^2$.

Лемма 3 [139]. Пусть функция $\psi(x, \alpha)$ имеет в \bar{Q} непрерывные первые производные по декартовым координатам точек x и α , а $u \in L_2(Q)$. Тогда интеграл

$$\omega(x) = \int_Q \frac{\psi(x, \alpha)}{r^2} u(y) dy$$

имеет обобщенные производные $\partial\omega/\partial x_k \in L_2(Q)$, $k = 1, 2, 3$. Эти производные определяются из формул

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_k} = v.p. \int_Q \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\psi(x, \alpha)}{r^2} \right] u(y) dy - u(x) \int_S \psi(x, \alpha) \cos(\xi_k) dS,$$

где ξ_k – угол между вектором \vec{r} , направленным от точки x к y , и ортом, который соответствует координате x_k .

Применяя лемму 3 о дифференцировании интеграла с ядром, имеющим слабую особенность, придем к представлению

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy = v.p. \int_Q \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy - \frac{1}{3} \delta_{ln} U_n(x).$$

Используя полученные соотношения, переходим от интегродифференциального уравнения (16) к векторному сингулярному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3} \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \\ & - \int_Q \hat{\Gamma}(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}^0(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь тензоры $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(x, y) &= k_0^2 \hat{G}_E(r) + (\cdot, \text{grad}) \text{grad } G_0(r); \\ \hat{\Gamma}_1(x, y) &= (\cdot, \text{grad}) \text{grad } G_1(r); \\ (\hat{\Gamma}_2(x, y))_{ij} &= \frac{\partial^2 g^j(r)}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Вопрос о разрешимости уравнения (18) и об эквивалентности краевой задачи дифракции и сингулярного интегрального уравнения устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть тело Q с кусочно-гладкой границей ∂Q характеризуется положительным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$ и $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Пусть $\omega \notin \sigma(M_l^0) \cup \sigma(M_l)$, а \mathbf{E}, \mathbf{H} и $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ – решения краевых задач (1), (4)–(6). Тогда существует и единственно решение $\mathbf{E} \in L_2(Q)$ уравнения (18). Обратно, если $\mathbf{E} \in L_2(Q)$ – решение интегрального уравнения (18), то формулы (13)–(17) дают решение краевой задачи для системы уравнений Максвелла (1), удовлетворяющее условию (4).

§4 Метод Галеркина

Одним из наиболее эффективных методов численного решения интегральных уравнений является метод Галеркина.

Для уравнения $A\varphi = f$, ($\varphi, f \in X$) в гильбертовом пространстве X метод формулируется следующим образом. Пусть конечномерные подпространства $X_n \subset X$ являются линейными оболочками базисных функций: $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, $P_n : X \rightarrow X_n$ – ортопроекторы. Потребуем, чтобы для $\{v_k\}$ выполнялось условие аппроксимации:

$$\forall \varphi \in X \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \psi\| = 0. \quad (19)$$

Метод Галеркина записывается следующим образом:

$$(A\varphi_n, v_l)_X = (f, v_l)_X, \quad l = 1, \dots, n,$$

где $(\cdot, \cdot)_X$ – скалярное произведение в X . Представив приближенное решение в виде $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$, получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (Av_k, v_l)_X = (f, v_l)_X, \quad l = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Рассмотрим вопрос о сходимости метода Галеркина для уравнения электрического поля (18). Сформулируем лемму.

Лемма 4 [16]. Предположим, что $A : X \rightarrow X$ есть ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный, и что проекционный метод сходится для A . Пусть B – линейный ограниченный оператор, $A + B$ инъективен. Оператор B удовлетворяет любому из двух условий:

- a) $\sup_{n \in N} \|A_n^{-1} P_n\| \cdot \|B\| = q < 1$; б) B компактен.

Тогда проекционный метод также сходится для оператора $A + B$.

Перепишем интегральное уравнение (18) для электрического поля в виде

$$(I + S - K)\mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad (21)$$

где операторы S и K определяются в соответствии с (18):

$$\begin{aligned} (S\mathbf{E})(x) &= \frac{1}{3} \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy; \\ (K\mathbf{E})(x) &= \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть тензор диэлектрической проницаемости таков, что

$$ess \sup_{x \in Q} \left[\sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right]^{1/2} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1},$$

и выполнено условие аппроксимации (19). Тогда уравнение (21) однозначно разрешимо для любой правой части, $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$ и метод Галеркина сходится для уравнения (18).

Вернемся теперь к вопросу о построении схемы Галеркина для рассматриваемой задачи дифракции. Будем формулировать метод не для сингулярного интегрального уравнения (18), а для интегро-дифференциального уравнения (16). Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления интегралов. Будем предполагать, что матрица $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)$ обратима в \bar{Q} ,

$$\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \in L_\infty(Q), \quad \hat{I} \text{ -- единичная матрица.}$$

Введя обозначения $\xi = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1}$, $\mathbf{J} := \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}$, перейдем от (16) к следующему уравнению:

$$A\mathbf{J} = \xi \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \mathbf{J}(y) dy - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x).$$

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G_E^l(x, y) J^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy &= \\ = E^{0l}(x), \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Определим компоненты приближенного решения $\bar{\mathbf{J}}$ таким образом:

$$\bar{J}^1 = \sum_{k=1}^N a_k f_k^1(x), \quad \bar{J}^2 = \sum_{k=1}^N b_k f_k^2(x), \quad \bar{J}^3 = \sum_{k=1}^N c_k f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции-«крышки», существенно зависящие лишь от переменной x_i .

Ниже проводится построение функций f_k^1 . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$, $\bar{Q} \subset P$. Разобьем Q параллелепипедами:

$$\begin{aligned} \Pi_{klm}^1 &= \left\{ x : x_{1,k-1} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\}; \\ x_{1,k} &= a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + 2 \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,k} = c_1 + 2 \frac{c_2 - c_1}{n} m, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, n-1; l, m = 1, \dots, n/2-1$.

Обозначив $h^1 := |x_{1,k} - x_{1,k-1}|$, получим формулы для f_{klm}^1 :

$$f_{klm}^1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1} |x_1 - x_{1,k}|, & x \in \bar{\Pi}_{klm}^1, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}^1. \end{cases}$$

Функции f_{klm}^2, f_{klm}^3 , зависящие от переменных x_2 и x_3 , соответственно, определяются аналогичными соотношениями. Построенное множество базисных функций удовлетворяет требуемому условию аппроксимации в L_2 [131].

Перенумеруем базисные функции $f_k^1, f_k^2, f_k^3, k = 1, \dots, N$. Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right),$$

элементы колонок B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений

$$A_{kl}^{ij} = (\xi_{kl} f_j^l, f_i^k) - \delta_{kl} k_0^2 \left(\int_Q G_E^k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k \right) -$$

$$-\left(\int_Q \tilde{G}(x,y) \frac{\partial}{\partial x_k} f_j^l(y) dy, \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k\right),$$

$$B_k^i = \left(E_0^k, f_i^k \right), k, l = 1, 2, 3; i, j = 1, \dots, N.$$

Здесь функция \tilde{G} имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{ab\gamma_{nm} \operatorname{sh}(\gamma_{nm}c)} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2 \times \\ & \times \begin{cases} \operatorname{sh} \gamma_{nm} x_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - y_3), & x_3 < y_3, \\ \operatorname{sh} \gamma_{nm} y_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - x_3), & x_3 > y_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Часто интерес представляют задачи рассеяния в среде, характеризующейся постоянной во всем объеме резонатора диэлектрической проницаемостью ($\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$) и тензорной магнитной проницаемостью $\hat{\mu}$ в Q (вне Q $\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 \hat{I}$). В этом случае краевая задача сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению (такого же типа) для магнитного поля и выражению для электрического поля через решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) = & \mathbf{H}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_H(r) \left[\frac{\hat{\mu}(y)}{\mu_0} - \hat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy + \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_H(r) \left[\frac{\hat{\mu}(y)}{\mu_0} - \hat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy, \quad x \in Q; \\ \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \int_Q \hat{G}_H(r) \left[\frac{\hat{\mu}(y)}{\mu_0} - \hat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy, \quad x \in P. \end{aligned}$$

В последних формулах $\hat{G}_H(x,y)$ – тензорная функция Грина прямоугольного резонатора, отвечающая произвольному распределению источников магнитного поля. Как и для рассматривавшейся функции Грина $\hat{G}_E(x,y)$, имеет место представление в виде суммы сингулярного слагаемого того же вида и гладкой функции. Следовательно, для задачи о возбуждении резонатора магнитным током верны все теоремы, сформулированные выше.

Раздел 2. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в слое

Раздел посвящен исследованию задачи дифракции стороннего электромагнитного поля на локально-неоднородном теле, помещенного в слой с идеально проводящими стенками. Для численного решения задачи возможно использовать метод конечных элементов. Однако прямое применение метода конечных элементов встречает ряд трудностей: краевая задача для системы уравнений Максвелла не является эллиптической, поэтому не работают стандартные схемы доказательства сходимости проекционных методов [16]; для получения приемлемой точности расчета поля в теле необходимо брать достаточно мелкую сетку, что влечет выбор такой же сетки в объеме вне тела, что в полной мере невозможно, т.к. объем неограничен, кроме того, различные сетки в этом случае ведут к неверным результатам. Все это, если учитывать трехмерный векторный характер задачи, приводит к разреженным матрицам очень больших порядков в методе конечных элементов.

От этих недостатков свободен метод объемных сингулярных интегральных уравнений. Здесь оператор получается эллиптическим, а интегральное уравнение решается только внутри тела (в области неоднородности).

Результаты раздела опубликованы в работе [72].

§1 Краевая задача дифракции

Рассмотрим краевую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат $P := \{x := 0 < x_3 < 1\}$ – слой. Экраны $\Sigma_1 = \{x : x_3 = 0\}$, $\Sigma_2 = \{x : x_3 = 1\}$ считаются бесконечно тонкими и идеально проводящими $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. В слое расположено объемное тело Q (такое, что $\bar{Q} \subset P$), характеризуемое постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительным трехмерным тензором (матрицей функцией) диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области \bar{Q} , $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$, а $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q – кусочно-гладкая. Тело Q не касается границ слоя $\partial Q \cap \Sigma = \emptyset$. В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными $\varepsilon_0 (> 0)$, $\mu_0 (> 0)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,\text{loc}}(P)$, возбуждаемое в резонаторе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}_E^0 \in L_{2,\text{loc}}(P)$. В области $P \subset \mathbb{R}^3$ стандартные дифференциальные операторы $\text{grad}(\nabla)$, div , rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{H}.\end{aligned}\tag{1}$$

Краевые условия для касательных к поверхности Σ составляющих электрического поля имеют вид

$$\mathbf{E}_\tau|_\Sigma = 0.\tag{2}$$

Должны выполняться условия конечности энергии в любом ограниченном объеме: $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{\text{loc}}^2(P)$.

Запишем условия на бесконечности:

- 1) при $\text{Im}\epsilon_0 > 0$, $\text{Im}\mu_0 > 0$, $\mathbf{E}, \mathbf{H} = o(\rho^{-1/2})$, $\rho := |x| \rightarrow \infty$ равномерно по всем направлениям x/ρ по x_3 ;
- 2) при $\text{Im}\epsilon_0 = 0$, $\text{Im}\mu_0 = 0$, $\epsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ потребуем, чтобы коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned}u_n(x) &= 2 \int_0^c u(x) \cos \pi n x_3 dx_3; \\ v_n(x) &= 2 \int_0^c v(x) \sin \pi n x_3 dx_3, \quad n \geq 0,\end{aligned}\tag{3}$$

для компонент $u = E_v$ или H_τ , $v = H_v$ или E_τ удовлетворяли условиям

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} - ik_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = o(\rho^{-1/2}), \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = O\left(\rho^{-1/2}\right), \quad \rho \rightarrow \infty:\tag{4}$$

– при $k_n^2 = k^2 - \pi^2 n^2 > 0$ ($k_n > 0$, если $k > \pi n$, $k_n < 0$, если $k < -\pi n$),

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = O(1), \quad \rho \rightarrow \infty;\tag{5}$$

– при $k_n = 0$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = o\left(\rho^{-1/2}\right), \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \\ \frac{\partial v_n}{\partial \rho} \end{pmatrix} = o\left(\rho^{-1/2}\right), \quad \rho \rightarrow \infty; \quad (6)$$

– при $\operatorname{Im} k_n > 0$ равномерно по n и по всем направлениям x/ρ ;
 $v = e_3 = (0, 0, 1)$, $v \cdot \tau = 0$.

Здесь условия (4) – условия Зоммерфельда для двумерной ограниченной области; (5) – условие на бесконечности для двумерного уравнения Лапласа. Эти условия накладываются лишь на конечное число коэффициентов Фурье, поэтому равномерность по n для них не требуется.

§2 Тензорная функция Грина слоя

Компоненты диагонального тензора Грина $G = \operatorname{diag}(G_1, G_2, G_3)$ определяются как решения уравнения Гельмгольца:

$$\Delta G_i + k^2 G_i = -\delta(x - y) \quad y \in P, i = 1, 2, 3.$$

С краевыми условиями I и II рода

$$G_{1,2} \Big|_{x_3=0} = G_{1,2} \Big|_{x_3=1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial G_3}{\partial x_3} \Bigg|_{x_3=0} = \frac{\partial G_3}{\partial x_3} \Bigg|_{x_3=1} = 0$$

условия на бесконечности [23] для $n \geq 0$

$$\frac{\partial g_n}{\partial \rho} - ik_n g_n = o\left(\rho^{-1/2}\right), \quad g_n = O\left(\rho^{-1/2}\right), \quad (7)$$

$$k_n^2 = k^2 - \pi^2 n^2, \quad \operatorname{Im} k_n \geq 0, \quad (8)$$

$k_n > 0$, если $k > \pi n$, $k_n < 0$, если $k < -\pi n$, где

$g_n = 2 \int_0^1 G(x, y) \cos \pi n x_3 dx_3$, $\rho := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ равномерно по всем

направлениям x/ρ , $x = (x_1, x_2)$, и равномерно по y из любого огра-

ниченного подмножества в \bar{P} . Условия (7), (8) являются условиями Зоммерфельда в двумерной ограниченной области. Коэффициенты Фурье являются решениями двумерного уравнения Гельмгольца с

параметром k_n^2 в области $\rho > \rho_0$ для некоторого ρ_0 . Из (7) видно, что g_n и $\frac{\partial g_n}{\partial \rho}$ экспоненциально убывают при $\rho \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Im} k_n > 0$.

Функции Грина могут быть представлены в одной из следующих форм [23]:

$$G_1(x, y) = G_2(x, y) = \frac{i}{2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sin(\pi j x_3) \sin(\pi j y_3) H_0^{(1)}(k|x-y|) \right],$$

$$G_3(x, y) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{2} H_0^{(1)}(k|x-y|) + \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\pi j x_3) \cos(\pi j y_3) H_0^{(1)}(k|x-y|) \right]$$

для $x \neq y$.

Или

$$G_{1,2}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ik|x-y-2je_3|}}{|x-y-2je_3|} - \frac{e^{ik|x-y^*-2je_3|}}{|x-y^*+2je_3|} \right),$$

$$G_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ik|x-y-2je_3|}}{|x-y-2je_3|} + \frac{e^{ik|x-y^*-2je_3|}}{|x-y^*+2je_3|} \right), \quad (9)$$

$e_3(0, 0, 1)$, $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода.

Выделим особенность при $|x-y| \rightarrow 0$:

$$G_1(x, y) = G_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \sin kx_3 \sin ky_3 \ln(1 - e^{2ik}) + A_1(x, y);$$

$$G_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \cos kx_3 \cos ky_3 \ln(1 - e^{2ik}) + A'_2(x, y),$$

где

$$A_1(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y^*|}}{|x-y^*|} +$$

$$+\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \left[\left(\frac{e^{ik|x-y-2je_3|}}{|x-y-2je_3|} - \frac{e^{ik|x_3-y_3-2j|}}{2|j|} \right) - \left(\frac{e^{ik|x-y^*-2je_3|}}{|x-y^*+2je_3|} - \frac{e^{ik|x_3-y_3+2j|}}{2|j|} \right) \right],$$

$$A'_2(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y^*|}}{|x-y^*|} + \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{e^{ik|x-y-2je_3|}}{|x-y-2je_3|} - \frac{e^{ik|x_3-y_3-2j|}}{2|j|} \right) + \left(\frac{e^{ik|x-y^*+2je_3|}}{|x-y^*+2je_3|} - \frac{e^{ik|x_3-y_3+2j|}}{2|j|} \right) \right].$$

Здесь $\ln(z)$ обозначает аналитическое продолжение вещественной функции $\ln t$, $t > 0$, на множество $C \setminus (-i\infty, 0)$; для коэффициентов $a_j^l(x, y)$ ряда $A_l(x, y)$ и их производных любого порядка α по x_i, y_i справедливы равномерные на каждом компакте $\bar{\Omega} \subset R^2$ оценки [23] $|D^\alpha a_j(x, y)| \leq C_\alpha j^{-2}$, $x, y \in \bar{\Omega}$. Откуда следует, что $A_l \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ ($l = 1, 2$).

Из представления (9) получаем, что $G_i(x, y, k)$ аналитичны по k в C_+ (при $\operatorname{Im} k > 0$). Обозначим через Λ множество значений k , при которых функции Грина G_i не определены:

$$\Lambda := \{k : k = \pi n, n \in Z\}.$$

Тогда, как показано в [23], G_i непрерывно дифференцируема по x_j, y_j любое число раз в $\bar{P} \times \bar{P}$ и непрерывна по k в $C_+ \setminus \Lambda$.

§3 Объемное сингулярное интегральное уравнение

Перепишем (1) в эквивалентной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_E;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H},$$

где $\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^0 + \mathbf{j}_E^p$, $\mathbf{j}_E^p = -i\omega (\hat{\epsilon}(x) - \varepsilon \hat{I}) \mathbf{E}$ – электрический ток поляризации.

Решение краевой задачи имеет вид

$$\mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_E, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_E,$$

где $\mathbf{A}_E = \int_P \hat{G}_E(r) \mathbf{j}_E(y) dy$ – векторный потенциал электрического

тока. Потенциал \mathbf{A}_E удовлетворяет уравнению $\Delta \mathbf{A}_E + k_0^2 \mathbf{A}_E = -\mathbf{j}_E$.

Таким образом, потенциал \mathbf{A}_E представляет собой свертку с тензором Грина для уравнения Гельмгольца, обеспечивающую выполнение требуемых краевых условий для полей.

Для поля E следует интегродифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, x \in Q. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, x \in P \setminus Q. \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (11) дает представление решения $\mathbf{E}(x)$ в области $x \in P \setminus Q$, если $E(y)$ – решение уравнения (10). Поле H выражается через решение (11) в виде

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^0(x) - i\omega \epsilon_0 \operatorname{rot} \int_Q \hat{G}_E \left[\frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, x \in P.$$

Сведем полученное интегродифференциальное уравнение к объемному векторному сингулярному интегральному уравнению.

Представим функцию Грина в виде

$$\begin{aligned} \hat{G}_E(r) = & \hat{G}_0(r) + \hat{G}_1(r) + \hat{G}_2(r), r = |x - y|; \\ \hat{G}_0(r) = & \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r} \hat{I}, \hat{G}_1(r) = \frac{1}{4\pi r} \hat{I}; \\ \hat{G}_2(r) = & \operatorname{diag}\{g^1, g^2, g^3\}. \end{aligned}$$

Отметим, что тензор \hat{G}_2 отличается от аналогичного тензора в разделе 1 данной главы.

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (10) для электрического поля и исследуем вопрос о возможности внесения операции $\operatorname{grad} \operatorname{div}$ под интегралы $\int \hat{G}(r) U(y) dy$.

В декартовой системе координат

$$\left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E(r) U(y) dy \right)_l = \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_n} \int_Q G_n(r) U_n(y) dy \right], l = 1, 2, 3.$$

Для функции G_0 внесение второй производной под знак интеграла возможно, т.к. функция и ее первая производная имеют слабую особенность. Это верно и для $\hat{G}_2(r)$ в силу гладкости $g^k (k=1, 2, 3)$.

Применяя лемму 3 к сингулярному интегралу с ядром $\frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{4\pi r}$,

придем к представлению

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy = v.p. \int_Q \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) - \frac{1}{3} \delta_{ln} U_n(x),$$

δ_{ln} – символ Кронекера.

Используя полученные соотношения, переходим от интегро-дифференциального уравнения к векторному сингулярному уравнению:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3} \left[\frac{\bar{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left\{ \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) \right\} dy - \\ - \int_Q \hat{\Gamma}(x, y) \left\{ \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) \right\} dy - \\ - \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left\{ \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) \right\} dy = \mathbf{E}^0(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь тензоры $\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(x, y) &= k_0^2 \hat{G}_E(r) + (\cdot, \text{grad}) \text{grad} G_0(r); \\ \hat{\Gamma}_1(x, y) &= (\cdot, \text{grad}) \text{grad} G_1(r); \quad (\hat{\Gamma}_2(x, y))_{i,j} = \frac{\partial^2 g^j(r)}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

§4 Метод Галеркина

Одним из наиболее эффективных методов численного решения интегральных уравнений является метод Галеркина.

Перепишем интегральное уравнение (12) в виде

$$(I + S - K) \mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad (13)$$

где операторы S и K определяются как

$$(S\mathbf{E})(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{\bar{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left\{ \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) \right\} dy;$$

$$(K\mathbf{E})(x) = \int_Q \hat{\Gamma}(x, y) \left\{ \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) \right\} dy - \\ - \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left\{ \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) \right\} dy.$$

Теорема 1 [181]. Пусть тензор диэлектрической проницаемости таков, что

$$ess \sup_{x \in Q} \left[\sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right]^{1/2} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1},$$

и выполнено условие аппроксимации (1.19). Тогда уравнение (13) однозначно разрешимо для любой правой части $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$, и метод Галеркина для него сходится.

Построим схему Галеркина для рассматриваемой задачи дифракции. Предположим, что матрица $\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & -\hat{I} \\ \varepsilon & \end{pmatrix}$ обратима в Q ,

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & -\hat{I} \\ \varepsilon & \end{pmatrix}^{-1} \in L_\infty(Q), \quad \hat{I} \text{ -- единичная матрица.}$$

Введем обозначения: $\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & -\hat{I} \\ \varepsilon & \end{pmatrix}^{-1}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & -\hat{I} \\ \varepsilon & \end{pmatrix} \mathbf{E}$.

Получим уравнение

$$A\mathbf{j} \equiv \hat{\xi}\mathbf{j}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \mathbf{j}(y) dy - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E \mathbf{j}(y) dy = E_0(x).$$

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} j^i(x) - k_0^2 \int_Q G_E^l j^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E \mathbf{j}(y) dy = \\ = E_0^l(x), \quad l = 1, 2, 3.$$

Определим компоненты приближенного решения $\bar{\mathbf{j}}$ следующим образом:

$$j^1 = \sum_{k=1}^N a_k f_k^1(x), \quad j^2 = \sum_{k=1}^N b_k f_k^2(x), \quad j^3 = \sum_{k=1}^N c_k f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции-«крышки», существенно зависящие от переменной x_i .

Построим функции f_k^1 . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$, $\bar{Q} \subset P$. Разобьем Q параллелепипедами:

$$\Pi_{klm}^1 = \left\{ x : x_{1,k-1} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,m} = b_1 + 2 \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,m} = c_1 + 2 \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где $k = 1, 2, \dots, n-1, l, m = 0, 1, \dots, n/2-1$.

Обозначим $h^1 = |x_{1,k} - x_{1,k-1}|$, получим формулы для f_{klm}^1 :

$$f_{klm}^1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1} |x_1 - x_{1,k}|, & x \in \bar{\Pi}_{klm}^1, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}^1. \end{cases}$$

Функции f_{klm}^2, f_{klm}^3 , зависящие от переменных x_2, x_3 , соответственно, определяются аналогичными соотношениями. Так как

$$f_{klm}^1 \Big|_{x_1 \notin \{x_{1,k-1}, x_{1,k+1}\}} = 0, \quad f_{klm}^2 \Big|_{x_2 \notin \{x_{2,l-1}, x_{2,l+1}\}} = 0, \quad f_{klm}^3 \Big|_{x_3 \notin \{x_{3,m-1}, x_{3,m+1}\}} = 0, \quad (14)$$

то каждая компонента вектора приближенного решения обращается в нуль на одной из граней Q . Тем не менее, построенное множество базисных функций удовлетворяет требуемому условию аппроксимации в L_2 [131]. Введем сквозную нумерацию для функций

$$f_k^i: f_k^1, f_k^2, f_k^3, k = 1, 2, \dots, N, N = \frac{1}{4}(n^3 - n^2).$$

Расширенную матрицу для определения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k удобно представить в блочной форме:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы A_{kl} и колонки B_k определяются из соотношений

$$B_k^i = (E_0^k, f_i^k);$$

$$A_{kl}^{ij} = (\xi_{kl} f_j^l, f_i^k) - \delta_{kl} k_0^2 \left(\int_Q G_k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right) -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} G_k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right), \quad (15)$$

$k, l = 1, 2, 3; i, j = 1, 2, \dots, N$.

Преобразуем второе скалярное произведение в (15), применяя к внешнему интегралу формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} G_k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right) = \\ & = - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} G_k(x, y) f_j^l(y) dy, \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) \right). \end{aligned}$$

Поверхностные интегралы отсутствуют в силу условия (14).

Перепишем (15), используя соотношение

$$\begin{aligned} A_{kl}^{ij} &= \left(\xi_{kl} f_j^l, f_i^k \right) - \\ &- \delta_{kl} k_0^2 \left(\int_{\Omega} G_k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right) + \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} G_k(x, y) f_j^l(y) dy, \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) \right), \end{aligned}$$

или записывая явно скалярные произведения по носителям базисных функций:

$$\begin{aligned} A_{kl}^{ij} &= \int_{\Pi_j^l \cap \Pi_i^k} \xi_{kl} f_j^l f_i^k dx - \delta_{kl} k_0^2 \int_{\Pi_i^k} \int_{\Pi_j^l} G_k(x, y) f_j^l(y) f_i^k(x) dy dx + \\ &+ \int_{\Pi_i^k} \int_{\Pi_j^l} \frac{\partial}{\partial x_l} G_k(x, y) f_j^l(y) \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) dy dx. \end{aligned}$$

Раздел 3. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе

Раздел посвящен исследованию задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле произвольной геометрической формы, помещенном в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками.

Рассматривается трехмерная векторная задача в полной электродинамической постановке. Решение таких задач является в настоящее время одной из самых актуальных проблем в электродинамике. Решение этих задач с приемлемой для практики точностью на электродинамическом уровне строгости математическими методами требует очень большого объема вычислений и часто невозможно даже на самых современных суперкомпьютерах. Особенно остро стоит проблема решения обратных электродинамических задач на сложной системе тел в резонансном диапазоне частот [132, 173].

При решении рассматриваемых задач конечно-разностные методы и методы конечных элементов встречают принципиальные трудности: область, в которой решается задача, должна быть сделана конечной. Такая редукция области приводит к появлению неконтролируемой ошибки, причем размеры области для ее уменьшения должны быть достаточно велики. Конечно-разностные методы и методы конечных элементов в такой ситуации обычно приводят к очень большим, но разреженным матрицам в системах линейных алгебраических уравнений (порядка 10^9 и более).

От этих недостатков свободен метод объемных сингулярных интегральных уравнений [156, 181]. Здесь оператор получается эллиптическим, а интегральное уравнение решается только внутри тела (в области неоднородности). В отличие от [156], мы изучаем интегральное уравнение, опираясь в основном на результаты исследования соответствующей краевой задачи и теорему эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения. На этом пути удается доказать теорему о существовании и единственности решений в L_2 интегрального уравнения, сходимость численного метода Галеркина, получить некоторые результаты о гладкости решений. После дискретизации получается конечномерная система уравнений с *плотной* (заполненной) матрицей. Таким образом, второй путь приводит к необходимости решать системы уравнений с плотными матрицами, но существенно меньших порядков (10^3 – 10^4).

Существует много алгоритмов и пакетов прикладных программ, реализующих процедуру численного решения интегральных или интегродифференциальных уравнений. Однако при этом, во-первых, не учитываются последние достижения в области исследования таких классов уравнений и численных методов их решения; во-вторых, не учитывается специфика решения таких задач методами параллельных вычислений на кластере. Точнее, матрицы систем линейных алгебраических уравнений, возникающие при применении численных методов типа метода Галеркина, имеют специальную *блочно-теплицевую структуру*, а элементы матрицы формируются в результате счета интегралов, вычисление которых может быть осуществлено независимо и *параллельно*. Учет этих факторов делает возможным и актуальным применение методов параллельных вычислений для решения трехмерных векторных задач электродинамики на вычислительных кластерах и суперкомпьютерах.

Результаты раздела опубликованы в работе [15, 42, 173].

§1 Краевая задача дифракции для системы уравнений Максвелла

Рассмотрим следующую задачу дифракции. Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . В волноводе расположено объемное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3 -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области \bar{Q} , $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок волновода, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В $P \setminus \bar{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными $\varepsilon_0 (> 0)$, $\mu_0 (> 0)$.

Требуется определить электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,\text{loc}}(P)$, возбуждаемое в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}^0 \in L_{2,\text{loc}}(P)$. В области $P \subset \mathbb{R}^3$ стандартные дифференциальные операторы grad , div , rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла (ниже понятие решения будет уточнено):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{H}.\end{aligned}\quad (1)$$

Эти решения должны удовлетворять условиям на бесконечности [95]: поля \mathbf{E} и \mathbf{H} при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют представление (+ соответствует $+\infty$, – соответствует $-\infty$):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} &= \sum_p R_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(1)}|x_3|} \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega\epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_p Q_p^{(\pm)} e^{i\gamma_p^{(2)}|x_3|} \begin{pmatrix} i\omega\mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \mathbf{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2)$$

где $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ или $\operatorname{Im} \gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geq 0$ и $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1, x_2)$; $\lambda_p^{(2)}$, $\Psi_p(x_1, x_2)$ ($k_0^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$) – полная система собственных значений и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана, соответственно, и $\nabla_2 \equiv \mathbf{e}_1 \partial/\partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial/\partial x_2$. Для коэффициентов разложений (2) имеют место оценки

$$R_p^{(\pm)}, Q_p^{(\pm)} = O(p^m), p \rightarrow \infty,\quad (3)$$

для всех $m \in N$.

С физической точки зрения условия (2) означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Условия (3) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (2), а также возможность их почлененного дифференцирования по x_j любое число раз.

Для \mathbf{E} , \mathbf{H} должны выполняться краевые условия на стенках волновода:

$$\mathbf{E}_\tau \Big|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_v \Big|_{\partial P} = 0.\quad (6)$$

Если выполняются уравнения Максвелла, то второе условие в (6) следует из первого, и его можно опустить. Но если рассматривать оператор Максвелла, порождаемый левой частью (1), то надо ставить оба условия.

Для $u \in H^1(P)$ существуют граничные значения из пространства $H^{1/2}(\partial P)$ в смысле теории следов. Почти везде на ∂P определен вектор нормали. Поэтому можно говорить о равенствах следов $\gamma_v u = 0$, $\gamma_\tau u = 0$, что будет равносильно этим равенствам в смысле данного выше определения.

Пусть также \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 – решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ (\hat{I} – единичный тензор):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}^0 + \mathbf{j}_E^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}^0 \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0 \Big|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_v^0 \Big|_{\partial P} = 0. \quad (8)$$

Эти решения могут быть выражены аналитически через \mathbf{j}_E^0 с помощью введенного в §2 тензора Грина. Решения не обязаны удовлетворять условиям на бесконечности. Например, \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 могут быть ТМ- или ТЕ-модой этого волновода.

Имеют место результаты о гладкости решений задач (1)–(6) и (7)–(8) при более гладких данных [181]. Сформулируем один из таких результатов.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{j}_E^0 \in H_{\text{loc}}^1(P)$. Тогда $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0 \in H_{\text{loc}}^1(P)$. Пусть, кроме того, $\partial Q \in C^2$, $\hat{\varepsilon} \in C^1(\bar{Q})$, тогда сужения $\mathbf{E}|_Q, \mathbf{H}|_Q \in H^1(Q)$ и $\mathbf{E}|_{P \setminus Q}, \mathbf{H}|_{P \setminus Q} \in H_{\text{loc}}^1(P \setminus Q)$. Кроме того, справедливы условия сопряжения на ∂Q :

$$[\mathbf{E}_\tau] \Big|_{\partial Q} = 0, \quad [\mathbf{H}_v] \Big|_{\partial Q} = 0,$$

где $[\cdot]$ означает разность следов с разных сторон ∂Q .

В предположениях утверждения 1 краевые условия на ∂P и условия сопряжения на ∂Q понимаются в смысле равенства следов элементов из $H_{\text{loc}}^{1/2}(\partial P)$ и $H^{1/2}(\partial Q)$. Ясно, что при первоначальных общих предположениях о тензоре $\hat{\varepsilon}$ такие условия сопряжения не имеют смысла.

§2 Тензорная функция Грина прямоугольного волновода

Построим диагональный тензор Грина \hat{G}_E , компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельм-

гольца в P с коэффициентом $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ и удовлетворяют краевым условиям первого или второго рода на ∂P , обеспечивающим обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках волновода. Его компоненты имеют вид [95]

$$\begin{aligned}
G_E^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{ab(1+\delta_{0n})\gamma_{nm}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos\left(\frac{\pi n}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}x_2\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a}y_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y_2\right) e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \right]; \\
G_E^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2}{ab(1+\delta_{0m})\gamma_{nm}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sin\left(\frac{\pi n}{a}x_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}y_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b}y_2\right) e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \right]; \\
G_E^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{ab\gamma_{nm}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sin\left(\frac{\pi n}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a}y_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y_2\right) e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\operatorname{Im} \gamma_{nm} \geq 0$.

Запишем G_E^m с выделенной особенностью при $x = y$:

$$G_E^m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y), \quad x, y \in P, \quad (10)$$

где функция $g^m \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ [95, с. 132]. Отсюда и в силу симметрии функций Грина $G_E^m(x, y) = G_E^m(y, x)$ ($m = 1, 2, 3$) имеем

Утверждение 2. Тензор Грина \hat{G}_E допускает представление

$$\hat{G}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P, \quad (11)$$

где матрица-функция (тензор) $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ и $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$.

Такое представление функции Грина удобно для теоретического исследования задачи дифракции, но непригодно для численных расчетов, т.к. не содержит алгоритма вычисления \hat{g} . В работе [95] изложен конструктивный метод выделения особенности, позволяющий корректно вычислять значения функции Грина вблизи особых точек.

Отметим, что функции Грина имеют единственную особенность вида $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|}$ и не имеют других особенностей в силу сделанного нами предположения о том, что тело не касается поверхности волновода.

§3 Объемное сингулярное интегральное уравнение

Наша ближайшая цель – свести краевую задачу к объемному сингулярному интегральному уравнению и доказать теорему эквивалентности.

Пусть решения краевых задач (1)–(6) и (7), (8) существуют и единственны. Перепишем (1) в эквивалентной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_E, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^0 + \mathbf{j}_E^p. \quad (13)$$

В последнем равенстве $\mathbf{j}_E^p = -i\omega(\hat{\epsilon}(x) - \epsilon_0 \hat{I}) \mathbf{E}$ – электрический ток поляризации.

Нетрудно проверить, что решение краевой задачи (6), (12) имеет вид

$$\mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}_E, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_E, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{A}_E = \int_P \hat{G}_E(r) \mathbf{j}_E(y) dy - \quad (15)$$

векторный потенциал электрического тока. Потенциал \mathbf{A}_E удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A}_E + k_0^2 \mathbf{A}_E = -\mathbf{j}_E. \quad (16)$$

Таким образом, потенциал \mathbf{A}_E есть свертка с тензором Грина прямоугольного волновода для уравнения Гельмгольца, обеспечивающей выполнение требуемых краевых условий для полей.

Однако формулы (14) не дают явного решения задачи (6), (12), т.к. ток \mathbf{j}_E зависит от \mathbf{E} . Из соотношений (13)–(15) для поля \mathbf{E} следует интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q.\end{aligned}\quad (17)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P \setminus Q.\end{aligned}\quad (18)$$

Формула (18) дает представление решения $\mathbf{E}(x)$ в области $P \setminus Q$, если $\mathbf{E}(y)$, $y \in Q$ – решение уравнения (17). Поле \mathbf{H} выражается через решение (17) в виде

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^0(x) - i\omega\varepsilon_0 \text{rot} \int_Q \hat{G}_E(r) \left[\frac{\bar{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in P. \quad (19)$$

Сведем полученное выше интегродифференциальное уравнение к объемному векторному сингулярному интегральному уравнению.

Представим функцию Грина в виде

$$\hat{G}_E(r) = \hat{G}_0(r) + \hat{G}_1(r) + \hat{G}_2(r), \quad r = |x - y|; \quad (20)$$

$$\hat{G}_0(r) = \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r} \hat{I}, \quad \hat{G}_1(r) = \frac{1}{4\pi r} \hat{I}, \quad \hat{G}_2(r) = \text{diag}\{g^1, g^2, g^3\}. \quad (21)$$

Отметим, что тензор \hat{G}_2 отличается от аналогичных тензоров в разделах 1 и 2.

Применяя лемму 3 о дифференцировании интеграла с ядром, имеющим слабую особенность, придем к представлению:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy = v.p. \int_Q \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \frac{1}{4\pi r} U_n(y) dy - \frac{1}{3} \delta_{ln} U_n(x). \quad (22)$$

Используя полученные соотношения, переходим от интегро-дифференциального уравнения (16) к векторному сингулярному интегральному уравнению:

$$\mathbf{E}(x) + \frac{1}{3} \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \\ - \int_Q \hat{\Gamma}(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}^0(x). \quad (23)$$

Здесь тензоры $\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2$ имеют вид

$$\hat{\Gamma}(x, y) = k_0^2 \hat{G}_E(r) + (\cdot, \text{grad}) \text{grad} G_0(r), \quad (24)$$

$$\hat{\Gamma}_1(x, y) = (\cdot, \text{grad}) \text{grad} G_1(r), \quad (25)$$

$$(\hat{\Gamma}_2(x, y))_{ij} = \frac{\partial^2 g^j(r)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (26)$$

Вопрос о разрешимости уравнения (23) и об эквивалентности краевой задачи дифракции и сингулярного интегрального уравнения устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть тело Q с кусочно-гладкой границей ∂Q характеризуется положительным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$ и $\hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Пусть \mathbf{E}, \mathbf{H} и $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ – единственые решения краевых задач (1)–(6) и (7), (8), соответственно. Тогда существует и единствено решение $\mathbf{E} \in L_2(Q)$ уравнения (23). Обратно, если $\mathbf{E} \in L_2(Q)$ – решение интегрального уравнения (23), то формулы (13)–(15), (17)–(19) дают решение краевой задачи для системы уравнений Максвелла (1), удовлетворяющее условию (6).

§4 Метод Галеркина

Одним из наиболее эффективных методов численного решения интегральных уравнений является метод Галеркина.

Перепишем интегральное уравнение (23) для электрического поля в виде

$$(I + S - K) \mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad (27)$$

где операторы S и K определяются в соответствии с (23):

$$\begin{aligned}
(\text{SE})(x) &= \frac{1}{3} \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(x) - v.p. \int_Q \hat{\Gamma}_1(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy; \\
(\text{KE})(x) &= \int_Q \hat{\Gamma}(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\
&\quad + \int_Q \hat{\Gamma}_2(x, y) \left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy. \tag{28}
\end{aligned}$$

Применяя лемму 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть однородное уравнение (27) имеет только тривиальное решение и тензор диэлектрической проницаемости таков, что

$$ess\sup_{x \in Q} \left[\sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right]^{1/2} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1}, \tag{29}$$

и выполнено условие аппроксимации (1.19). Тогда уравнение (27) однозначно разрешимо для любой правой части $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$ и метод Галеркина сходится для уравнения (27).

Вернемся теперь к вопросу о построении схемы Галеркина для рассматриваемой задачи дифракции. Будем формулировать метод не для сингулярного интегрального уравнения (23), а для интегро-дифференциального уравнения (17). Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления интегралов. Будем предполагать, что матрица $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)$ обратима в \bar{Q} ,

$$\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \in L_\infty(Q), \quad \hat{I} \text{ -- единичная матрица.}$$

Введя обозначения

$$\xi = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1}, \quad \mathbf{J} := \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}, \tag{30}$$

перейдем от (17) к следующему уравнению:

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad l = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \xi_{l_i} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G'_E(x, y) J^i(y) dy - \\ & - A \mathbf{J}(x) = \xi \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \mathbf{J}(y) dy - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x). \quad (32) \end{aligned}$$

Определим компоненты приближенного решения $\bar{\mathbf{J}}$:

$$\bar{J}^1 = \sum_{i=1}^N a_i f_i^1(x), \quad \bar{J}^2 = \sum_{i=1}^N b_i f_i^2(x), \quad \bar{J}^3 = \sum_{i=1}^N c_i f_i^3(x), \quad (33)$$

где f_i^k – базисные функции-«крышки», существенно зависящие лишь от переменной x_k .

Ниже проводится построение функций f_i^1 . Будем считать, что Q – параллелепипед:

$$Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, \quad b_1 < x_2 < b_2, \quad c_1 < x_3 < c_2\}, \quad \bar{Q} \subset P.$$

Разобьем Q параллелепипедами

$$\Pi_{ijm}^1 = \left\{ x : x_{1,i-1} < x_1 < x_{1,i+1}, \quad x_{2,j} < x_2 < x_{2,j+1}, \quad x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\};$$

$$x_{1,i} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} i, \quad x_{2,j} = b_1 + 2 \frac{b_2 - b_1}{n} j, \quad x_{3,m} = c_1 + 2 \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где $i = 1, \dots, n-1; \quad j, m = 1, \dots, n/2-1$.

Обозначив

$$h^1 := |x_{1,i} - x_{1,i-1}|,$$

получим формулы для f_{ijm}^1 :

$$f_{ijm}^1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1} |x_1 - x_{1,i}|, & x \in \bar{\Pi}_{ijm}^1; \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{ijm}^1. \end{cases}$$

Функции f_{ijm}^2, f_{ijm}^3 , зависящие от переменных x_2 и x_3 соответственно, определяются аналогичными соотношениями. Построенное множество базисных функций удовлетворяет требуемому условию аппроксимации в L_2 [131].

Перенумеруем базисные функции $f_i^1, f_i^2, f_i^3, \quad i = 1, \dots, N$.

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right),$$

элементы колонок B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_i^k = (E_0^k, f_i^k);$$

$$A_{ij}^{kl} = (\xi_{kl} f_j^l, f_i^k) - \delta_{kl} k_0^2 \left(\int_Q G_E^k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k \right) - \left(\int_Q \tilde{G}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_k} f_j^l(y) dy, \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k \right),$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Здесь функция \tilde{G} имеет вид

$$\tilde{G} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{ab\gamma_{nm}} \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \right].$$

Часто интерес представляют задачи рассеяния в среде, характеризующейся постоянной во всем объеме волновода диэлектрической проницаемостью ($\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \hat{I}$) и тензорной магнитной проницаемостью $\hat{\mu}$ в Q (вне $Q \hat{\mu} = \hat{\mu}_0 \hat{I}$). В этом случае краевая задача сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению (такого же типа) для магнитного поля и выражению для электрического поля через решение этого уравнения

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_H(r) \left[\frac{\hat{\mu}(y)}{\mu_0} - \hat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_H(r) \left[\frac{\hat{\mu}(y)}{\mu_0} - \hat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy, \quad x \in Q;$$

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^0(x) + i\omega\mu_0 \text{rot} \int_Q \hat{G}_H(r) \left[\frac{\hat{\mu}(y)}{\mu_0} - \hat{I} \right] \mathbf{H}(y) dy, \quad x \in P.$$

В последних формулах $\hat{G}_H(x, y)$ – тензорная функция Грина прямоугольного волновода, отвечающая произвольному распределению источников магнитного поля. Как и для рассматривавшейся функции Грина $\hat{G}_E(x, y)$, имеет место представление в виде суммы сингулярного слагаемого того же вида и гладкой функции. Следовательно, для задачи о возбуждении волновода магнитным током верны все теоремы, сформулированные выше.

Глава 3. Гибридный метод

Гибридные методы стали в последнее время все чаще использоваться для решения внешних электромагнитных задач дифракции на системе диэлектрических и идеально проводящих тел [9, 31]. Суть гибридного метода решения задачи дифракции заключается в следующем. Выбирается фиктивная замкнутая поверхность, содержащая систему диэлектрических и идеально проводящих тел. Вне этой поверхности решение задачи записывается в явном виде с помощью поверхностных потенциалов. Внутри поверхности задача решается каким-либо методом, а затем решения вне и внутри поверхности «сшиваются» с помощью условий сопряжения. В результате, кроме уравнений внутри фиктивной поверхности (в объеме), возникают дополнительные поверхностные уравнения на фиктивной поверхности, что и обусловило название метода как гибридного.

Метод позволяет перейти от решения внешней задачи дифракции к решению внутренней задачи с некоторыми дополнительными поверхностными уравнениями. Основным преимуществом данного метода является его универсальность для решения задач дифракции на системе ограниченных тел. Одним из главных недостатков метода является неэллиптичность оператора задачи при решении дифракции электромагнитной волны.

Цель настоящей главы состоит в новой формулировке гибридного метода таким образом, чтобы в результате получить эллиптичный оператор задачи. Теоретические основы такого подхода были разработаны в [7].

Как известно [16], для получения приближенного решения уравнения с эллиптическим оператором удобно использовать метод Галеркина. При этом необходимым и достаточным условием сходимости метода Галеркина является свойство аппроксимации.

Пусть H – гильбертово пространство, H' – антидвойственное к H [16, 186], $A: H \rightarrow H'$ – линейный ограниченный инъективный оператор. Пусть $H_n \subset H$ – последовательность подпространств ($n = 1, 2, \dots$), предельно плотных в H , т.е. обладающих следующим **свойством аппроксимации**:

$$\inf_{\psi \in H_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

для всех $\varphi \in H$. Ниже мы всегда предполагаем, что свойство (1) для H_n выполнено (это необходимое условие сходимости метода Галеркина).

Рассмотрим операторное уравнение

$$A\varphi = f, \varphi \in H, f \in H', \quad (2)$$

и схему метода Галеркина для приближенного решения этого уравнения:

$$(A\varphi_n, g) = (f, g) \text{ для всех } g \in H_n, \quad (3)$$

где $\varphi_n \in H_n$ – приближенное решение. Будем считать, что размерность подпространств H_n равна n : $\dim H_n = n$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает отношение двойственности между пространствами H' и H .

Условие эллиптичности является достаточным условием сходимости метода Галеркина (при выполнении необходимого условия – свойства аппроксимации (1)). В этом случае базисные функции в методе Галеркина можно выбирать любыми, лишь бы они удовлетворяли свойству аппроксимации, т.е. их линейные оболочки H_n удовлетворяли свойству (1). Как будет показано ниже, это обстоятельство в гибридных методах позволяет выбирать базисные функции на поверхности и в объемной области независимо друг от друга (согласование поверхностных и объемных базисных функций является одной из основных трудностей в гибридных методах [9]).

Из вышесказанного следует, что необходимо стремиться к таким постановкам электродинамических задач, в которых оператор A будет эллиптическим. Тогда вопрос о сходимости метода Галеркина будет сводиться к выбору базисных функций, обладающих свойством аппроксимации.

Ниже предлагается использовать гибридную формулировку задачи с представлением поля во внешней области с помощью функции Грина. Естественно, фиктивная поверхность S выбирается таким образом, чтобы было возможно построить функцию Грина во внешности S . Поэтому в работе выбрана сфера, хотя все результаты (об эллиптичности задачи) остаются в силе и для произвольной кусочно-гладкой поверхности S .

Результаты главы опубликованы в работах [159, 161].

§1 Гибридный метод для электромагнитной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла

В данном параграфе рассматривается векторная задача дифракции стороннего электромагнитного поля на системе идеально проводящих тел Ω . Конечная область пространства заполнена средой с кусочно-непрерывными диэлектрической и магнитной проницаемостью-

ми $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$. Используется традиционная постановка для системы уравнений Максвелла. Эта задача была рассмотрена, например, в [9].

Ниже доказывается, что такая постановка задачи дифракции приводит к неэллиптическому оператору, отвечающему гибридной формулировке задачи. Точнее, устанавливается, что основной оператор («блок») в блочной операторной матрице, отвечающей уравнению в объеме, не будет эллиптическим. Отсюда следует, что и полный оператор задачи также не будет эллиптическим. Поэтому, с нашей точки зрения, постановку задачи, основанную на системе уравнений Максвелла, следует «отвергнуть». Отметим, что неэллиптичность задачи в данном случае не связана с поверхностными уравнениями, неиспользованием функций Грина и т.д.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – система ограниченных непересекающихся тел с кусочно-гладкими (замкнутыми) граничными поверхностями $\partial\Omega$. Пусть S – замкнутая гладкая поверхность, содержащая Ω так, чтобы $S \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Обозначим внешность S через V_+ , а внутреннюю часть S без $\overline{\Omega}$ – через V_- ; $\mathbb{R}^3 = V_+ \cup V_- \cup S \cup \overline{\Omega}$.

Пусть в области V_+ задано падающее поле $\mathbf{E}^0(x)$, $\mathbf{H}^0(x)$, $x \in V_+$. Требуется определить полное поле $\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{H}(x)$, которое имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(x) \\ \mathbf{H}(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{E}_+(x) + \mathbf{E}^0(x), \quad \mathbf{H}_+(x) + \mathbf{H}^0(x), & x \in V_+; \\ \mathbf{E}_-(x), \quad \mathbf{H}_-(x), & x \in V_-. \end{cases} \quad (6)$$

В силу представления (6) все условия в V_- будут только однородными.

Параметры среды в V_- описываются функциями $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$, которые предполагаются кусочно-постоянными. В области V_+ вещественные положительные константы ε_0 , μ_0 ; $\omega > 0$ – круговая частота. Поверхности разрыва $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ предполагаются кусочно-гладкими и обозначены через Γ .

Рассмотрим следующую краевую задачу для систем уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}, \quad x \in V_-; \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_+ = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_+, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_+ = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_+, \quad x \in V_+; \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_\tau \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

$$[\mathbf{E}_\tau]_\Gamma = 0, \quad (10)$$

$$[\mathbf{H}_\tau]_\Gamma = 0; \quad (11)$$

$$[\mathbf{E}_\tau]_S = 0; \quad (12)$$

$$[\mathbf{H}_\tau]_S = 0; \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_+ + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_+) = o(r^{-1}), \quad (14)$$

при $r = |x| \rightarrow \infty$ (\mathbf{e}_r – единичный вектор, $\mathbf{e}_r = x/|x|$). Здесь индекс τ означает взятие касательных к поверхности, составляющих векторное поле, а скобки $[\cdot]$ – разность следов функции с разных сторон поверхности.

В области V_- запишем слабую (вариационную) формулировку задачи для определения \mathbf{E} , \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega} \int_{V_-} \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{t}} \right) dx + \\ & + i \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) dS = 0 \quad \forall \mathbf{t} \in L_{2,\operatorname{rot}}(V_-). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение \mathbf{E} , \mathbf{H} ищем в пространстве

$$L_{2,\operatorname{rot}}(V_-) = \{ \mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(V_-), \operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H} \in L_2(V_-) \}.$$

Если к (15) добавить второе уравнение в (7)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon \mathbf{E}, \quad (16)$$

то вариационная формулировка задачи будет эквивалентна уравнениям (7), краевым условиям (9), условиям сопряжения (10), (11), понимаемым в смысле распределений.

В области V_+ запишем интегральное представление для полей \mathbf{E}_+ , \mathbf{H}_+ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta_0} \mathbf{E}_+(x) = \operatorname{rot} \int_S \mathbf{M}_0(y) \Phi(x, y) dS_y + \\ & + \frac{1}{ik_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_S \mathbf{J}_0(y) \Phi(x, y) dS_y; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_+(x) = \operatorname{rot} \int_S \mathbf{J}_0(y) \Phi(x, y) dS_y + \\ & + \frac{1}{ik_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_S \mathbf{M}_0(y) \Phi(x, y) dS_y, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{M}_0(y) = -\mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}_+|_S$, $\mathbf{J}_0(y) = \mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}_+|_S$ – неизвестные магнитный и электрический поверхностные токи; n – внешняя нормаль к V_+ ;

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}, k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}.$$

Здесь в $\mathbf{M}_0 \in H^{-1/2}(S)$, $\mathbf{J}_0 \in H^{-1/2}(S)$ – касательные векторные поля (точнее, сечения векторных расслоений над S [95, 167]). Определения и свойства пространств H^S изложены, например, в [186].

Из равенства (13) имеем

$$\int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_+ - \mathbf{J}_0) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{U}}) dS = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{U}}) dS \quad (19)$$

для любой функции $(\mathbf{n} \times \mathbf{U}) \in H^{1/2}(S)$. Условие (19) эквивалентно (13).

Кроме того, из (12) имеем

$$\int_S (\mathbf{E}_- \times \mathbf{n} - \mathbf{M}_0) \cdot \bar{\mathbf{t}}|_S dS = \int_S (\mathbf{E}^0 \times \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{t}}|_S dS, \quad (20)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{E}_- \times \mathbf{n} - \mathbf{E}^0 \times \mathbf{n}. \quad (21)$$

Тогда вместо (15) получаем

$$\frac{1}{\omega_{V_-}} \int \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{t}} \right) dx + i \int_S \mathbf{M}_0 \cdot \bar{\mathbf{t}} dS = -i \int_S (\mathbf{E}^0 \times \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{t}} dS. \quad (22)$$

Из формул (17), (18) с помощью векторной функции Грина можно получить выражение для \mathbf{J}_0 через \mathbf{M}_0 :

$$\mathbf{J}_0(x) = \int_S D_x \left[\frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} + K(x, y) \right] \mathbf{M}_0(y) dS, \quad (23)$$

где D_x – некоторый дифференциальный оператор.

Введем новые неизвестные функции:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{E}^0 \times \mathbf{n}|_S, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0|_S. \quad (24)$$

Тогда уравнение (22) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\omega_{V_-}} \int \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{t}} \right) dx + i \int_S \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{t}} dS = 0; \quad (25)$$

уравнение (20) – к виду

$$\int_S (\mathbf{n} \times \operatorname{tr} \mathbf{H} - \mathbf{J}) \cdot (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{U}}) dS = 0; \quad (26)$$

уравнение (23) – к виду

$$\mathbf{J}(x) = \int_S D_x \left[\frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} + K(x, y) \right] \mathbf{M}(y) dS_y + f(x), \quad (27)$$

где

$$f(x) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0|_S - \int_S \left[\frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} + K(x, y) \right] (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}|_S) dS. \quad (28)$$

Квадратичная форма оператора A , определяемого первым интегралом в (22),

$$a(\mathbf{H}, \mathbf{t}) = \frac{1}{\omega} \int_V \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{t}} \right) dx, \quad (29)$$

согласно формулам

$$a(\mathbf{H}, \mathbf{t}) = (A\mathbf{H}, \mathbf{t}) \quad \forall \mathbf{t} \in L_{2,\operatorname{rot}}(V_-); \quad (30)$$

$$A: L_{2,Rot}(V_-) \rightarrow L'_{2,Rot}(V_-), \quad (31)$$

не является коэрцитивной. Действительно, если $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, то формула (28) отрицательно определена (при вещественных ϵ и μ), а при $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$ и малых ω – положительно определена. Отсюда следует, что оператор A , а значит и полный оператор для всей задачи, не будет сильно эллиптическим.

Таким образом, для получения свойства эллиптичности, необходимо изменять постановку задачи и переходить от краевой задачи для системы уравнений Максвелла к эквивалентной краевой задаче (другой путь состоит в том, чтобы получать «расщепление» оператора на подпространствах, аналогичное поверхностным уравнениям электрического поля [95, 167]).

§2 Гибридный метод и эллиптичность задачи дифракции для векторного уравнения Гельмгольца

В данном параграфе рассматривается та же задача, что и в §1. Отличие состоит в том, что здесь рассматриваем не систему урав-

нений Максвелла, а систему уравнений Гельмгольца. Эти задачи эквивалентны, но вторая приводит к эллиптическому оператору, отвечающему исходной краевой задаче. Докажем лишь эллиптичность основного оператора в операторной матрице, поскольку эллиптичность задачи сопряжения доказана в [7], а из эллиптичности краевой задачи сопряжения следует эллиптичность гибридной формулировки с использованием функций Грина.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ – система ограниченных непересекающихся тел с кусочно-гладкими (замкнутыми) граничными поверхностями $\partial\Omega$. Пусть S – замкнутая поверхность, содержащая Ω так, чтобы $S \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Обозначим внешность S через V_+ , а внутренность S без $\overline{\Omega}$ – через V_- ; $\mathbb{R}^3 = V_+ \cup V_- \cup S \cup \overline{\Omega}$.

Рассмотрим задачу (6)–(13) с условиями излучения

$$\omega\mu_0\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_+ + k_0\mathbf{E}_+ = o(|x|^{-1}), \quad \mathbf{E}_+ = O(|x|^{-1}), \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Основная идея следующих построений состоит в том, чтобы изменить условия сопряжения на S и Γ таким образом, чтобы преобразовать уравнения в области V_- и на поверхности S и получить сильно эллиптический оператор. При этом исходная краевая задача сводится к эквивалентной краевой задаче. Эта идея предложена в [7]. Будем считать ε , μ , k кусочно-постоянными во всем пространстве \mathbb{R}^3 .

Предположим, что

$$\operatorname{Re} \varepsilon_j > 0, \operatorname{Im} \varepsilon_j \geq 0, \mu_j > 0. \quad (33)$$

Введем следующие условия сопряжения:

$$[\mathbf{E}_\tau]_\Sigma = 0; \quad (34)$$

$$[\mathbf{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}]_\Sigma = 0; \quad (35)$$

$$[\varepsilon \mathbf{E}_n]_\Sigma = 0; \quad (36)$$

$$[\lambda \operatorname{div} \mathbf{E}]_\Sigma = 0, \quad (37)$$

где $\Sigma = S \cup \Gamma$, $\lambda = \lambda_j$ в области V_\pm , а индекс n означает взятие нормальной к поверхности составляющей векторного поля. Краевые условия на $\partial\Omega$ запишем в виде

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial\Omega} = 0; \quad (38)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (39)$$

где под div понимается поверхностная дивергенция. Выберем $\lambda = (\mu\epsilon)^{-1}$. Тогда, как показано в [7], задача (6)–(14) будет эквивалентна задаче

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \text{ в } V_-; \quad (40)$$

$$\Delta \mathbf{E}_+ + k_0^2 \mathbf{E}_+ = 0 \text{ в } V_+ \quad (41)$$

с краевыми условиями (38), (39), условиями сопряжения (34)–(37) и условиями излучения

$$\mathbf{e}_r \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_+ - \mathbf{e}_r \operatorname{div} \mathbf{E}_+ + ik_0 \mathbf{E}_0 = o(|x|^{-1}) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Докажем следующую теорему эквивалентности.

Теорема 1. *Если \mathbf{E}, \mathbf{H} – решение краевой задачи (6)–(14), то \mathbf{E}, \mathbf{H} – решение краевой задачи (34)–(42). И наоборот: если \mathbf{E}, \mathbf{H} – решение краевой задачи (34)–(42), \mathbf{E}, \mathbf{H} – решение краевой задачи (6)–(14).*

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу (6)–(14). Из уравнений (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}((i\omega\mu)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) + i\omega\epsilon \mathbf{E} &= 0, \quad x \in V_-; \\ \operatorname{rot}((i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}_+) + i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_+ &= 0, \quad x \in V_+, \end{aligned}$$

что влечет (поскольку μ кусочно-постоянно в V_- , а μ_0 постоянно в V_+) выполнение уравнений (40) и (41). Хорошо известно [110], что уравнения Максвелла (7) и (8) приводят к уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ в V_- , $\operatorname{div} \mathbf{E}_+ = 0$ в V_+ . Таким образом, условия (37) и (39) удовлетворяются автоматически. Условие (34) следует из (10) и (12), а условие (35) следует из уравнений (7), (8) и из условий (11) и (13). Условие (38) совпадает с условием (9).

Далее, как показано в [110], условие излучения (32) эквивалентно условию (14). Тогда, принимая во внимание, что $\operatorname{div} \mathbf{E}_+ = 0$ в V_+ , получаем (32) из (42).

Остается проверить только условие (36). Для произвольной пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ имеем

$$0 = \int_{\Sigma} \operatorname{grad} \varphi [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_{\Sigma} ds = - \int_{V_- \cup V_+} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} dx =$$

$$i\omega \int_{V_-+V_+} \operatorname{grad} \varphi \cdot \varepsilon \mathbf{E} dx = -i\omega \int_{\Sigma} \varphi [\mathbf{n} \cdot \varepsilon \mathbf{E}]_{\Sigma} ds$$

и, следовательно, $[\varepsilon \mathbf{E}_n]_{\Sigma} = 0$. Таким образом, все условия (34)–(42) выполняются.

Докажем обратное утверждение. Пусть условия (34)–(42) выполняются. Так как E_0 – электрическое поле, то $\operatorname{div} \mathbf{E}_+ = 0$ в V_+ . Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (i\omega\mu)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E} \text{ в } V_-; \\ \mathbf{H}_+ &= (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}_+ \text{ в } V_+. \end{aligned}$$

Условие (9) совпадает с (38), а условия (10) и (12) совпадают с (34). Условия (11) и (13) следуют из (35). Условие излучения (14) эквивалентно условию (32), условие (32) следует из (42), если $\operatorname{div} \mathbf{E}_+ = 0$.

Уравнения (7) и (8) удовлетворяются в силу (40) и (41), если $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ в V_- , а $\operatorname{div} \mathbf{E}_+ = 0$ в V_+ , в то же время,

$$\operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{i\omega\mu} \Delta \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_+ = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \Delta \mathbf{E}_+.$$

Следовательно, для завершения доказательства достаточно показать, что $\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv 0$ в V_- , а $\operatorname{div} \mathbf{E}_+ \equiv 0$ в V_+ .

Пусть

$$v = \frac{1}{k^2} \operatorname{div} \mathbf{E} \text{ в } V_- \cup V_+, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu.$$

Тогда скалярная функция v удовлетворяет в $V_- \cup V_+$ уравнению Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad x \in V_- \cup V_+, \quad (43)$$

с условиями сопряжения на поверхностях Σ раздела сред (в силу (37))

$$[v]_{\Sigma} = 0, \quad (44)$$

краевым условиям на $\partial\Omega$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (45)$$

и условиям Зоммерфельда (в силу (42))

$$\mathbf{e}_r \cdot \operatorname{grad} v - ik_0 v = o(|x|^{-1}), \quad v = O(|x|^{-1}), \quad \text{для } |x| \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Кроме того, функция v удовлетворяет также второму условию сопряжения в форме

$$\left[\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0. \quad (47)$$

Действительно, рассмотрим функцию $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \operatorname{grad} v$ в $V_- \cup V_+$. Тогда

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{div} \mathbf{E} + \Delta v = k^2 v - k^2 v = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}.$$

Таким образом, пара функций $(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{H})$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (7), (8) и условиям сопряжения $[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_{\Sigma} = 0$. Как и выше, отсюда заключаем, что $[\varepsilon \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{E}}]_{\Sigma} = 0$, так что, принимая во внимание (36), получаем условие (47).

Таким образом, имеем однородную краевую задачу сопряжения (43)–(47) относительно функции v . Однако известно (утверждение 4 [8]), что эта краевая задача имеет только тривиальное решение. Следовательно, $v \equiv 0$ в $V_- \cup V_+$, что и завершает доказательство. #

В области V_- запишем «слабую» (вариационную) формулировку задачи E ($\mathbf{H} = (i\omega\mu)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}$):

$$\begin{aligned} & \int_{V_-} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} + \operatorname{div} \mathbf{E} \operatorname{div} \bar{\mathbf{t}}) dx - \\ & - \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \left(-\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{E} \right) + \mathbf{n} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{E} \right) dS = 0, \\ & \forall \mathbf{t} \in \hat{H}^1(V_-), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\hat{H}(V_-) = \left\{ \mathbf{E} \in L_2(V_-) : \operatorname{rot} \mathbf{E} \in L_2(V_-), \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) \in L_2(V_-) : \mathbf{E}_{\tau}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$.

Так как полуторалинейная форма

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{t}) = \int_{V_-} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} + \operatorname{div} \mathbf{E} \operatorname{div} \bar{\mathbf{t}}) dx$$

является коэрцитивной на пространстве $\hat{H}^1(V_-)$, оператор рассматриваемой краевой задачи будет сильно эллиптическим [5, 7].

Используя функцию Грина $G_D(x, y)$, получаем следующее представление для поля $\mathbf{E}_+(x)$, во внешности сферы [110]:

$$\mathbf{E}_+(x) = \int_S \left[\operatorname{grad}_y G_D(x, y) \right] \times \left[\mathbf{E}_+(y) \times \mathbf{n}(y) \right]_S dS_y, |x| > R. \quad (49)$$

Явный вид функции G_D представлен ниже.

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца во внешности сферы определяется как решение краевой задачи:

$$\Delta G + k_0^2 G_D = -\delta(x - x_0), |x_0| > R; \quad (50)$$

$$G_D|_{r=R} = 0; \quad (51)$$

$$G_D = O\left(\frac{1}{r}\right), \frac{\partial G_D}{\partial r} - ik_0 G_D = o\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Здесь $G_D = G_D(x, x_0) = G_D(x_0, x)$, $r = |x|$. В сферических координатах имеем $G_D = G_D(r, \theta, \varphi; r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

Функция G_D представляется в виде

$$G_D(x, x_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-x_0|}}{|x-x_0|} + g_D(x, x_0), \quad (53)$$

где $g_D(x, x_0) = g_D(x_0, x)$ не имеет особенности при $|x - x_0| \rightarrow 0$. Для функции g_D получаем краевую задачу:

$$\Delta g_D + k_0^2 g_D = 0, |x_0| > R; \quad (54)$$

$$g_D|_{r=R} = -\left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-x_0|}}{|x-x_0|} \right)|_{r=R}; \quad (55)$$

$$(\partial/\partial r - ik_0) g_D = o(1/r), g_D = O(1/r), r \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Обозначим

$$v(x, x_0) = -\left(\frac{e^{ik_0|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|} \right)|_{r=R}.$$

Ищем $g_D(x, x_0)$ в виде

$$g_D(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^n c_n \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r_0)}{\sqrt{k_0 r_0}} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta_0, \varphi_0),$$

где $H_v^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля I рода порядка v ; $Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$ – сферические нормированные функции [110]; $c_n = c_n(R_0)$ не зависят от

$r, \theta, \varphi, r_0, \theta_0, \varphi_0$. Условия (56) и уравнение (54) удовлетворяются «автоматически».

Для функции $\frac{e^{ik_0|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|}$ имеем разложение [110]:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{ik_0|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|} = \\ & = ik_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^n c_n \frac{J_{n+1/2}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r_0)}{\sqrt{k_0 r_0}} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta_0, \varphi_0), \quad r_0 > r. \end{aligned} \quad (57)$$

Из условия (55) находим коэффициенты c_n :

$$c_n = -ik_0 \left(\frac{J_{n+1/2}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \right) \Bigg|_{r=R} \left[\left(\frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \right) \Bigg|_{r=R} \right]^{-1}.$$

Введем сферические функции Бесселя и Ханкеля:

$$j_n(z) = J_{n+1/2}(z)/\sqrt{z}; \quad (58)$$

$$h_n^{(1)}(z) = H_{n+1/2}^{(1)}(z)/\sqrt{z}. \quad (59)$$

Тогда функцию Грина $G_D(x, x_0)$ можно записать в форме

$$\begin{aligned} G_D &= \frac{e^{ik_0|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|} - \\ &- ik_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^n \frac{j_n(k_0 R)}{h_n^{(1)}(k_0 R)} h_n^{(1)}(k_0 r) h_n^{(1)}(k_0 r_0) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta_0, \varphi_0) \end{aligned} \quad (60)$$

или в виде

$$\begin{aligned} G_D(x, x_0) &= ik_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^n \left(j_n(k_0 r) - \frac{j_n(k_0 R)}{h_n^{(1)}(k_0 R)} h_n^{(1)}(k_0 r) \right) \times \\ &\times h_n^{(1)}(k_0 r_0) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta_0, \varphi_0), \quad r_0 > r. \end{aligned} \quad (61)$$

Представление (60) имеет место при любых $|x|, |x_0| \geq R$. Представление (61) справедливо только при $r_0 \geq r$; если $r_0 < r$, то следует поменять местами $r \leftrightarrow r_0$.

Введем неизвестные функции:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \mathbf{E}_+(x) \cdot \mathbf{n}(x) \Big|_S, \quad x \in S, \\ \Psi_0(x) &= \mathbf{E}_+(x) \times \mathbf{n}(x) \Big|_S, \quad x \in S \quad (\Psi_0 = \Psi_0). \end{aligned} \quad (62)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+(x) = & \int_S \left[\operatorname{grad}_y G_D(x, y) \right] \times \Psi_0(y) dS_y + \\ & + \int_S \left[\operatorname{grad}_y G_D(x, y) \right] \varphi_0(y) dS_y, |x| > R.\end{aligned}\quad (63)$$

Поскольку

$$\operatorname{grad}_y G_D(x, y) \Big|_{y \in S} = n(y) \frac{\partial G_D(x, y)}{\partial n_y},$$

то

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+(x) = & \int_S \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x, y) \mathbf{n}(y) \times \Psi_0(y) dS_y + \\ & + \int_S \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x, y) n(y) \varphi_0(y) dS_y, |x| > R.\end{aligned}$$

Далее,

$$\operatorname{grad}_x \frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x, y) \Big|_{x \in S} = n(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{\partial G_D}{\partial n_y}(x, y) \right) \Big|_{x \in S},$$

если $x \neq y$, $x \in S$ и $y \in S$. Тогда получаем уравнения

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E}_+(x) = & \int_S \left(\operatorname{grad}_x \frac{G_D(x, y)}{\partial n_y} \right) \cdot \left[\mathbf{n}(y) \times \Psi_0(y) \right] dS_y + \\ & + \int_S \left(\operatorname{grad}_x \frac{G_D(x, y)}{\partial n_y} \right) \cdot n(y) \varphi_0(y) dS_y, |x| > R,\end{aligned}\quad (64)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E}_+(x) = & \int_S \left(\operatorname{grad}_x \frac{G_D(x, y)}{\partial n_y} \right) \times \left[\mathbf{n}(y) \times \Psi_0(y) \right] dS_y + \\ & + \int_S \left(\operatorname{grad}_x \frac{G_D(x, y)}{\partial n_y} \right) \times n(y) \varphi_0(y) dS_y, |x| > R.\end{aligned}\quad (65)$$

Обозначим

$$J(x, y) = \frac{\partial^2 G_D(x, y)}{\partial n_x \partial n_y}, x, y \in S. \quad (66)$$

Отметим, что $J(x, y) = J(y, x)$ и функция J является симметричной относительно x и y , поскольку функция Грина $G_D(y, x)$ также симметрична относительно x и y .

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int_S \bar{\mathbf{t}}(x) \left[-\mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S + \mathbf{n}(x) \operatorname{div} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \right] dS_x = \\ &= \int_S \left[-\operatorname{rot} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \cdot (\bar{\mathbf{t}}(x) \times \mathbf{n}(x)) + (\bar{\mathbf{t}}(x) \cdot \mathbf{n}(x)) \operatorname{div} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \right] dS_x = \\ &= \int_S \left[-\operatorname{rot} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \cdot \bar{\mathbf{U}}(x) + \bar{u}(x) \operatorname{div} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \right] dS_x = \\ &= \iint_{SS} \left\{ J(x, y) \left[\mathbf{n}(x) \times \bar{\mathbf{U}}(x) \right] \cdot \left[\mathbf{n}(y) \times \Psi_0(y) \right] + \right. \\ &\quad + J(x, y) \left[\mathbf{n}(x) \times \bar{\mathbf{U}}(x) \right] \cdot \left[\mathbf{n}(y) \varphi(y) \right] + \\ &\quad + J(x, y) \left[\mathbf{n}(y) \times \Psi_0(y) \right] \cdot \left[\mathbf{n}(x) \bar{u}(x) \right] + \\ &\quad \left. + J(x, y) \left[\mathbf{n}(x) \bar{u}(x) \right] \cdot \left[\mathbf{n}(y) \varphi_0(y) \right] \right\} dS_x dS_y, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{t}(x) \times \mathbf{n}(x), \quad u(x) = \mathbf{t}(x) \cdot \mathbf{n}(x);$$

$\mathbf{t}(x)$ – векторное поле.

Любое векторное поле $\mathbf{V}(x)$ на поверхности S может быть представлено через касательную и нормальную составляющие в форме [7]:

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}_n(x) + \mathbf{V}_\tau(x) \equiv \mathbf{n} \left[\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}(x) \right] + \left\{ -\mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times V(x) \right] \right\}.$$

Введем оператор следа на поверхности S :

$$(tr \mathbf{V})(x) = \mathbf{V}(x) \Big|_S = \mathbf{V}(x), \quad x \in S$$

(след различен с разных сторон поверхности S). Тогда

$$\mathbf{n}(x)u(x) = \mathbf{t}_n(x);$$

$$\mathbf{n}(x) \times \mathbf{U}(x) = -\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{t}(x)] = \mathbf{t}_\tau(x);$$

$$\mathbf{n}(x)\varphi_0(x) = [\mathbf{E}_+(x)]_n;$$

$$\mathbf{n}(x) \times \Psi_0(x) = -\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_+(x)] = (\mathbf{E}_+(x))_\tau,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{t}}(x) \left[-\mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S + \mathbf{n}(x) \operatorname{div} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \right] dS_x = \\ = \iint_{SS} J(x, y) \left[\operatorname{tr} \mathbf{E}_+(y) \right] \cdot \left[\operatorname{tr} \bar{\mathbf{t}}(x) \right] dS_x dS_y. \end{aligned} \quad (67)$$

Из условий сопряжения (34) и (36) на поверхности S (они называются «главными» условиями) следует

$$\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}_- - \operatorname{tr} \mathbf{E}_+ = \operatorname{tr} \mathbf{E}_0,$$

или

$$\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}_+ = \operatorname{tr} \mathbf{E}_- - \operatorname{tr} \mathbf{E}_0, \quad (68)$$

где $\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость в V_- (в окрестности поверхности S), а

$$\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}_- = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{E}_-)_n \\ (\mathbf{E}_-)_\tau \end{pmatrix} = \varepsilon_r (\mathbf{E}_-)_n + (\mathbf{E}_-)_\tau.$$

Используя соотношение (68), исключаем функцию $\mathbf{E}_+(y)$ из уравнения (67) и получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_S \bar{\mathbf{t}}(x) \left[-\mathbf{n}(x) \times \operatorname{rot} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S + \mathbf{n}(x) \operatorname{div} \mathbf{E}_+(x) \Big|_S \right] dS_x = \\ = \iint_{SS} \frac{1}{\mu} J(x, y) \left[\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}_-(y) \right] \cdot \left[\overline{\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{t}(x)} \right] dS_x dS_y - \\ - \iint_{SS} \frac{1}{\mu} J(x, y) \left[\operatorname{tr} \mathbf{E}_0(y) \right] \cdot \left[\overline{\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{t}(x)} \right] dS_x dS_y. \end{aligned} \quad (69)$$

Принимая во внимание условия сопряжения (35) и (37) окончательно получаем вариационное соотношение

$$\begin{aligned} \int_{V_-} \frac{1}{\mu} \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} + \operatorname{div} \mathbf{E} \operatorname{div} \bar{\mathbf{t}} - k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{t}} \right) dx - \\ - \iint_{SS} \frac{1}{\mu} J(x, y) \left[\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}(y) \right] \cdot \left[\overline{\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{t}(x)} \right] dS_x dS_y = \\ = - \iint_{SS} \frac{1}{\mu} J(x, y) \left[\operatorname{tr} \mathbf{E}_0(y) \right] \cdot \left[\overline{\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{t}(x)} \right] dS_x dS_y \quad \forall \mathbf{t} \in \hat{H}(V_-), \end{aligned} \quad (70)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_-$. Это уравнение определяет электрическое поле \mathbf{E} в V_- . Запишем уравнение (63) в следующей форме:

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{t}) + j(\hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}, \hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{t}) = j(\operatorname{tr} \mathbf{E}_0, \hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{t}) \quad \forall \mathbf{t} \in \hat{H}(V_-), \quad (71)$$

где полуторалинейные формы a и j определяются посредством формул

$$\begin{aligned} a(\mathbf{E}, \mathbf{t}) &= \int_{V_-} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{t}} + \operatorname{div} \mathbf{E} \operatorname{div} \bar{\mathbf{t}} - k^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{t}}) dx; \\ j(Q, q) &= - \iint_{SS} \frac{1}{\mu} J(x, y) Q(y) \cdot \bar{q}(x) dS_x dS_y. \end{aligned}$$

Определим операторы A и J

$$\begin{aligned} A : \hat{H}(V_-) &\rightarrow \hat{H}'(V_-); \\ J : T\hat{H}(V_-) &\rightarrow T\hat{H}'(V_-) \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{E}, \mathbf{t}) &= (A\mathbf{E}, \mathbf{t}) \quad \forall \mathbf{t} \in \hat{H}(V_-), \mathbf{E} \in \hat{H}(V_-); \\ j(Q, q) &= \langle JQ, q \rangle \quad \forall q \in T\hat{H}(V_-), Q \in T\hat{H}(V_-). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{H}'(V_-)$ – антидвойственное к $\hat{H}(V_-)$ пространство; $T\hat{H}(V_-)$ – пространство следов элементов из $\hat{H}(V_-)$; $T\hat{H}'(V_-)$ – антидвойственное к нему пространство. Скобки (\cdot, \cdot) и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают соотношения двойственности на паре пространств $\hat{H}'(V_-)$, $\hat{H}(V_-)$ и $T\hat{H}'(V_-)$, $T\hat{H}(V_-)$ соответственно.

Обозначим оператор следа через T :

$$T\mathbf{E} = \hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E},$$

который является ограниченным в пространствах

$$T : \hat{H}(V_-) \rightarrow T\hat{H}(V_-).$$

Сопряженный оператор T^* также ограничен:

$$T^* : T\hat{H}'(V_-) \rightarrow \hat{H}'(V_-).$$

Введем новую неизвестную функцию (векторное поле на S) по формуле

$$\Phi = \hat{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{E}_-. \quad (72)$$

Тогда уравнение (71) можно переписать в виде

$$(A\mathbf{E}, \mathbf{t}) + \langle J\Phi, T\mathbf{t} \rangle = \langle JF_0, T\mathbf{t} \rangle \quad \forall \mathbf{t} \in \hat{H}(V_-), \quad (73)$$

где $F_0 = \text{tr } \mathbf{E}_0$, или в операторной форме:

$$A\mathbf{E} + T^*J\Phi = T^*JF_0. \quad (74)$$

Соотношение (72) дает

$$-T\mathbf{E} + \Phi = 0. \quad (75)$$

Домножив (75) на оператор

$$J^* : T\hat{H}'(V_-) \rightarrow T\hat{H}(V_-),$$

получим

$$-J^*T\mathbf{E} + J^*\Phi = 0. \quad (76)$$

Оператор J^* ограничен и фредгольмов в силу сильной эллиптичности оператора J [7] и является непрерывно обратимым, поскольку внешняя задача Дирихле для сферы для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение. Поэтому из (76) следует также (75), и эти уравнения эквивалентны.

Теперь уравнения (74) и (76) можно объединить в общее уравнение с матричным блочным оператором:

$$\begin{pmatrix} A & T^*J \\ -J^*T & J^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^*JF_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

или, эквивалентно,

$$A_0 X = F, \quad A_0 : H \rightarrow H', \quad (78)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & T^*J \\ -J^*T & J^* \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} T^*JF_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Здесь $H = \hat{H}(V_-) \times T\hat{H}(V_-)$, $H' = \hat{H}'(V_-) \times T\hat{H}'(V_-)$ – декартово произведение пространств. Запишем выражение для квадратичной формы оператора A_0 :

$$\begin{aligned} (A_0 X, X)_{H'H} &= (AE, E) + (T^*J\Phi, E) - \langle J^*TE, \Phi \rangle + \langle J^*\Phi, \Phi \rangle = \\ &= (AE, E) + \langle J\Phi, TE \rangle - \langle TE, J\Phi \rangle + \langle \Phi, J\Phi \rangle = \\ &= (AE, E) + \langle J\Phi, TE \rangle - \overline{\langle J\Phi, TE \rangle} + \overline{\langle J\Phi, \Phi \rangle} \end{aligned}$$

и

$$\text{Re}(A_0 X, X)_{H'H} = \text{Re}(AE, E) + \text{Re}\langle J\Phi, \Phi \rangle. \quad (80)$$

Как отмечалось выше, A – эллиптический оператор, J – также эллиптический оператор (см. доказательство в [7]). Следовательно, полный оператор задачи A_0 будет также эллиптическим, поскольку следующие оценки имеют место:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left(\left(A+K_A\right) E, E\right)+ \\ & +\operatorname{Re}\left(\left(J+K_J\right) \Phi, \Phi\right) \geq \lambda_A\|E\|_{\hat{H}(V_-)}^2+\lambda_J\|\Phi\|_{T\hat{H}(V_-)}^2 \end{aligned} \quad (81)$$

с некоторыми компактными операторами

$$K_A: \hat{H}(V_-) \rightarrow \hat{H}'(V_-), K_J: T\hat{H}(V_-) \rightarrow T\hat{H}'(V_-), \lambda_A>0, \lambda_J>0.$$

Операторное уравнение (78) можно записать в виде вариационного соотношения

$$(A_0 X, Y)_{HH}=(F, Y)_{HH} \quad \forall Y \in H \quad (82)$$

или более подробно:

$$\begin{aligned} & (AE, t)+\langle J \Phi, T t\rangle-\overline{\langle J v, T E\rangle}+\overline{\langle J v, \Phi\rangle}= \\ & =\langle F_0, T t\rangle \quad \forall t \in \hat{H}(V_-), v \in T\hat{H}(V_-). \end{aligned} \quad (83)$$

Итак, предлагаемый метод базируется на вариационном соотношении (83), которое определяет эллиптический оператор. Для применения метода Галеркина к решению задачи выбираем базисные функции $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^N \subset \hat{H}(V_-)$, $\{\varphi_l\}_{l=1}^M \subset T\hat{H}(V_-)$ для представления приближенного решения E^N, Φ^M в форме

$$E^N=\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{e}_i, \Phi^M=\sum_{l=1}^M \beta_l \varphi_l$$

и решаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & (A E^N, \mathbf{e}_j)+\langle J \Phi^M, T \mathbf{e}_j\rangle-\overline{\langle J \varphi_m, T E^N\rangle}+ \\ & +\overline{\langle J \varphi_m, \Phi^M\rangle}=\langle J F_0, T \mathbf{e}_j\rangle, \end{aligned} \quad (84)$$

$$j=1, 2, \dots, N, m=1, 2, \dots, M .$$

Матрица системы линейных уравнений (84) имеет вид $\widehat{A}=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N+M}$, где коэффициенты определяются по формулам

$$a_{ij}=\int_{(V_-)} \mu^{-1}\left(\operatorname{rot} \mathbf{e}_i \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}}_j+\operatorname{div} \mathbf{e}_i \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}}_j-k^2 \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j\right) d x, i, j=1, 2, \dots, N ;$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -\iint_S \mu^{-1} J(x, y) [\varphi_i(y)] \cdot [\bar{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{e}_j(x)] dS_x dS_y, \\ i = N+1, \dots, N+M, j = 1, 2, \dots, N; \\ \iint_S \mu^{-1} \bar{J}(x, y) [\bar{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{e}_i(y)] \cdot [\bar{\varphi}_j(x)] dS_x dS_y, \\ i = 1, 2, \dots, N, j = N+1, \dots, N+M; \\ -\iint_S \mu^{-1} \bar{J}(x, y) [\varphi_i(y)] \cdot [\bar{\varphi}_j(x)] dS_x dS_y, \\ i, j = N+1, \dots, N+M, \end{cases} \quad (85)$$

а коэффициенты правой части \hat{f} определяются посредством соотношений

$$\hat{f} = \left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N+M}, \quad f_j = 0, \quad j = N+1, \dots, N+M,$$

$$f_j = -\iint_S \mu^{-1} J(x, y) [\operatorname{tr} E_0(y)] \cdot [\bar{\varepsilon} \operatorname{tr} \mathbf{e}_j(x)] dS_x dS_y, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда (84) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$\hat{A}b = \hat{f}, \quad (86)$$

где $b = (\alpha_1, \dots, \alpha_N; \beta_1, \dots, \beta_M)^T$ – столбец неизвестных.

Сходимость метода Галеркина в этом случае следует из эллиптичности оператора задачи и свойства аппроксимации для базисных функций.

Мы не обсуждаем выбор конкретных базисных функций и не приводим результаты численных расчетов. Здесь укажем лишь общие свойства численного метода в рамках предлагаемого подхода.

Полный оператор задачи становится эллиптическим. С помощью введения функции Грина удается исключить одно поверхностное уравнение на S . Таким образом, количество неизвестных при решении внешней краевой задачи уменьшается. Это приводит к снижению размерности результирующей матрицы, отсутствию сложностей, связанных с согласованием поверхностных и объемных элементов. От объемных и поверхностных базисных функций требуется лишь свойство аппроксимации в соответствующем пространстве. Свойство комплексной симметричности (не самосопряженности!) основного разреженного блока матрицы сохраняется. Гарантируется сходимость метода Галеркина.

Использование функции Грина незначительно усложняет задачу вычисления поверхностных интегралов, т.к. она имеет простой вид. Особенность функции Грина выделена аналитически. Остаток (в виде ряда) представляет собой функцию без особенности, поэтому затраты, связанные с вычислением поверхностных интегралов, практически не возрастают.

Отметим, что в указанном подходе имеется возможность исключить поверхностное уравнение на S и решать сразу вариационное уравнение (70), рассматривая на S следы объемных элементов. При этом малый «плотный» блок матрицы, отвечающий поверхностному уравнению, рассредоточивается в большом «разреженном» блоке, размерность матрицы уменьшается. Однако вопрос об эффективности такого приема может быть решен только численно в результате сравнения конкретных расчетов.

Часть 2

ЗАДАЧИ

НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Обширный класс векторных задач электродинамики – это спектральные задачи о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах. Применение в радиотехнике и электронике в качестве волноведущих структур волноводов сложных поперечных сечений, микрополосковых и щелевых линий передачи потребовало построения математических моделей процессов распространения электромагнитных волн в таких устройствах. При этом возникла необходимость исследования нового широкого класса задач электродинамики, характеризующихся сложной геометрией граничных незамкнутых поверхностей, неоднородным диэлектрическим заполнением и наличием бесконечно тонких металлических ребер (пластин) в структуре. Первейшей задачей здесь является описание свойств нормальных электромагнитных волн, которые могут распространяться в таких структурах.

При исследовании процессов распространения волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением возникают краевые задачи на собственные значения для систем уравнений эллиптического типа с разрывными коэффициентами. На линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов ставятся дополнительные условия, называемые условиями сопряжения. В простейших задачах спектральный параметр присутствует лишь в уравнениях и не входит в условия сопряжения, в результате возникает задача на собственные значения для некоторого самосопряженного оператора. Однако при анализе достаточно сложных моделей спектральный параметр уже входит не только в уравнения, но и в условия сопряжения, причем нелинейно. Задача оказывается несамосопряженной.

Проводились многочисленные исследования данного круга задач. Главное внимание было уделено получению практических результатов – расчету характеристик основной волны структуры, представляющей наибольший интерес с физической точки зрения, а также нескольких высших типов волн.

Численные методы расчета параметров различных типов волноведущих структур изложены в монографиях и обзорных работах [75, 81, 84, 87, 104, 121, 192].

Однако следует сказать, что большинство используемых методов не получило до сих пор серьезного математического обоснования. Несмотря на большое количество работ, долгое время оставались недоказанными теоремы о существовании хотя бы одной точки спектра и о дискретности спектра задачи, необходимые для строгого обоснования математической модели. Не выяснены до конца вопросы, связанные со сходимостью методов. Практически отсутствуют результаты о распределении характеристических чисел в комплексной плоскости. Не исследуются такие свойства системы собственных и присоединенных волн, как полнота и базисность, необходимые для задач возбуждения и при моделировании неоднородностей в структурах.

Исследование этого круга вопросов требует привлечения новых теоретических методов. Дело в том, что задача о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах так или иначе сводится к изучению сложной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра, что весьма затруднительно традиционными методами теории дифракции.

Теория распространения электромагнитных волн в волноводах с однородным заполнением получила свое завершение в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [153–155], в которых, помимо исследования спектра нормальных волн, были решены вопросы о разложимости поля по системе собственных волн волновода, а также построены функции Грина, позволяющие получить решение задачи возбуждения волновода сторонним источником. Но задача о распространении волн в таких волноводах не является векторной, а, как говорят, «распадается» на две скалярные самосопряженные задачи.

Для волноводов с неоднородным заполнением известны некоторые частные результаты, касающиеся распределения спектра нормальных волн. Для прямоугольных волноводов со слоистым заполнением [12, 84] и для круглых волноводов с круглым магнитодиэлектрическим стержнем [121] получены и исследованы трансцендентные «дисперсионные» уравнения, позволяющие вычислять точки спектра (постоянные распространения и затухания) с любой наперед заданной точностью. Однако даже в этих простейших случаях отсутствуют результаты о свойствах системы нормальных волн (полнота, базисность).

Задача о нормальных волнах волноведущей структуры с неоднородным заполнением является векторной и несамосопряженной. В таких структурах могут существовать «комплексные» волны (или, точнее, комплексно-сопряженные волны), отвечающие точкам спектра, не лежащим на вещественной или мнимой осях в ком-

плексной плоскости. Этот эффект был обнаружен и исследован в работах [58, 70]. Существование кратных точек спектра и их классификация обсуждались в [93, 115].

Существенный вклад в математическую теорию распространения электромагнитных волн в сложных волноведущих структурах был сделан А. С. Ильинским и Ю. В. Шестопаловым [102–104, 192–194]. Ими было предложено сводить задачу о нормальных волнах волноведущей структуры к исследованию некоторой мероморфной оператор-функции, сложным образом зависящей от спектрального параметра. Оператор-функция является матричным интегральным сингулярным оператором или оператором с логарифмической особенностью ядра и рассматривается в пространствах Гельдера с весом. Задача редуцируется к однородным одномерным интегральным уравнениям по линиям разрыва коэффициента диэлектрической проницаемости. В разработке этого подхода принимали участие также Е. В. Чернокожин [101] и автор настоящей работы [97–100].

Дискретность спектра задачи для широкого класса волноведущих структур с неоднородным заполнением была доказана на основе фредгольмовости оператор-функции для этой задачи. Для щелевых структур с малыми размерами щели методом малого параметра с помощью операторного обобщения теоремы Руше А. С. Ильинским и Ю. В. Шестопаловым [104] была установлена непустота спектра задачи. Позднее А. С. Ильинским, Ю. В. Шестопаловым, Е. В. Чернокожиным и автором были доказаны [98, 101, 103, 104] некоторые теоремы о распределении точек спектра на комплексной плоскости. Следует подчеркнуть, что никаких результатов о полноте или базисности системы нормальных волн получено не было.

Принципиально другой подход, основанный на сведении задачи к изучению некоторого операторного пучка в пространствах Соболева, был предложен автором. Общая теория операторных пучков разработана достаточно полно. Основополагающей здесь является работа М. В. Келдыша [108], посвященная изучению несамосопряженных полиномиальных операторных пучков, получивших впоследствии название пучков Келдыша. Дальнейшее развитие теория получила в 1950–1970-е гг. в работах В. Б. Лидского, М. Г. Крейна, И. Ц. Гохберга, А. С. Маркуса, В. И. Мацаева, А. Г. Костюченко, Г. В. Радзиевского и других авторов [54, 76–78, 113, 122, 125–128]. Отметим, что теория операторных пучков тесно связана с теорией несамосопряженных операторов [54, 76], поэтому удается использовать также мощный аппарат этой теории для исследования возникающих в настоящей работе операторных пучков. Операторные пучки применялись для анализа волноводных задач (другого типа) в [82, 89, 114].

Глава 1. Метод операторных пучков

В разделе 1 рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением. Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным метод операторных пучков. После того как исходная краевая задача сведена к изучению некоторого операторного пучка, можно использовать аппарат функционального анализа для исследования спектральных свойств пучка. Теория для многих видов операторных пучков разработана достаточно полно. Отметим, что альтернативный подход, основанный на методах теории потенциала, дает менее глубокие результаты [104].

Описывается широкий класс волноведущих структур и формулируется задача о нормальных волнах для однородной системы уравнений Максвелла. Эта задача сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Неоднородность диэлектрического заполнения, наличие острых «ребер» и вхождение спектрального параметра в условия сопряжения приводят к необходимости дать специальное определение решения задачи. Для определения решения используется вариационная формулировка задачи.

Задача сводится к изучению операторного пучка четвертого порядка. Устанавливаются свойства операторов пучка, необходимые для анализа его спектральных свойств. Оказывается, что рассматриваемый пучок не принадлежит к какому-либо известному классу (пучков Келдыша, гиперболических пучков и т.д.).

Доказываются утверждения о свойствах спектра пучка $L(\gamma)$. Доказываются теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел пучка на комплексной плоскости.

Рассматриваются вопросы полноты системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$. Доказываются три теоремы о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$ либо с конечным дефектом, либо при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на параметры задачи. В последнем случае используется метод факторизации пучка.

Раздел 2 посвящен изучению свойств системы собственных и присоединенных волн волноведущих структур, описанных в разделе 1. Это свойства полноты, базисности, а также соотношения ор-

тогональности для системы собственных и присоединенных волн. Этими свойствами интересуются главным образом при решении задач возбуждения волноведущей структуры каким-либо источником, поскольку практически все схемы решения таких задач используют перечисленные свойства [63]. Без анализа вопросов полноты, базисности упомянутые схемы остаются необоснованными.

Рассматривается основной случай $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, когда задача является векторной. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ задача о распространении волн в волноведущих структурах сводится к двум скалярным и хорошо изучена в работах [153–155].

Дается определение собственных и присоединенных волн структуры с помощью собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$. Показывается, что такое определение эквивалентно обычному определению, которое дается на основе решения системы уравнений Максвелла. Ценность нашего определения заключается в том, что собственные и присоединенные волны строятся только с помощью продольных компонент Π_p , Ψ_p , что позволяет в дальнейшем ограничиться изучением пучка $L(\gamma)$.

Доказывается основная теорема этого раздела о полноте системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн в $L_2^4(\Omega)$. Наиболее важным является тот факт, что именно двукратная полнота (по Келдышу) системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$ в $H \times H$ влечет полноту (в обычном смысле) системы поперечных компонент в $L_2^4(\Omega)$. Эта теорема позволяет применить достаточные признаки двукратной полноты системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$, установленные в разделе 1, для анализа вопроса о полноте системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн. Следует подчеркнуть, что изучение свойств системы поперечных компонент связано с известной схемой Л. А. Вайнштейна решения задачи возбуждения волноведущей структуры каким-либо источником [63].

Устанавливаются соотношения ортогональности для поперечных компонент собственных и присоединенных волн. В простейшем случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и отсутствуют присоединенные волны (а также граница области Ω кусочно-гладкая), такие соотношения были известны [63]. Доказанные свойства ортогональности позволяют построить биортогональную систему в $L_2^4(\Omega)$ к системе поперечных компонент собственных и присоединенных волн и тем

самым установить не только полноту, но и минимальность этой системы.

Однако эта система в общем случае не будет базисом в $L_2^4(\Omega)$.

Точнее, доказывается, что если существует бесконечное множество характеристических чисел пучка $L(\gamma)$ кратности 1 (наиболее простая и распространенная ситуация), то упомянутая выше система не будет базисом Шаудера в $L_2^4(\Omega)$.

Раздел 1. Задача о распространении нормальных волн в волноведущих структурах

Важный класс существенно векторных электродинамических задач на незамкнутых поверхностях – это задачи о распространении волн в сложных волноведущих структурах. В последние 10–15 лет возрос интерес к математическим методам исследования процессов распространения электромагнитных волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением. Хотя подобные структуры стали применяться на практике уже более 30 лет назад и многие физические аспекты процессов распространения волн в простейших структурах хорошо известны, интерес к точным математическим методам их исследования сохраняется. Широкое применение в электронике таких типов волноведущих структур, как частично заполненные волноводы сложного поперечного сечения, полосковые и щелевые линии передачи и различные их соединения, привело к необходимости строгого математического анализа их электродинамических свойств.

При исследовании процессов распространения волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением возникают краевые задачи на собственные значения для систем уравнений Гельмгольца с разрывными коэффициентами. При этом на линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов ставятся дополнительные условия, называемые условиями сопряжения. В простейших задачах спектральный параметр присутствует лишь в уравнениях, в результате возникает задача на собственные значения для некоторого самосопряженного оператора. Однако при анализе достаточно сложных моделей спектральный параметр уже входит не только в уравнения, но и в условия сопряжения, причем нелинейным образом. Задача становится несамосопряженной.

Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным метод операторных пучков. После того как исходная краевая задача сведена к изучению некоторого операторного пучка, можно использовать аппарат функционального анализа для исследования спектральных свойств пучка. Теория для многих видов операторных пучков разработана достаточно полно (см. обзор литературы в [146]).

В §1 рассматривается постановка задачи. Описывается класс волноведущих структур и формулируется задача о нормальных волнах для однородной системы уравнений Максвелла. Эта задача сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Неоднородность диэлектрического заполнения, наличие острых «ребер» и вхождение спектрального параметра в условия сопряжения приводят к необходимости дать специальное определение решения задачи. Для определения решения используется вариационная формулировка задачи.

В §2 задача сводится к изучению операторного пучка четвертого порядка. Исследуются свойства операторов пучка, необходимые для анализа его спектральных свойств в § 3, 4. Оказывается, что рассматриваемый пучок не принадлежит какому-либо известному классу (пучков Келдыша, гиперболических пучков и т.д.).

В §3 устанавливаются свойства спектра пучка $L(\gamma)$. Доказываются теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел пучка на комплексной плоскости.

В §4 рассматриваются вопросы полноты системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$. Доказываются три теоремы: о двукратной полноте системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$ либо с конечным дефектом, либо при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на параметры задачи. В последнем случае используется метод возмущения, или метод факторизации пучка.

Результаты раздела опубликованы в работах [162, 163, 174].

§1 Задача о нормальных волнах волноведущей структуры

Пусть $Q \subset R^2 = \{x_3 = 0\}$ – ограниченная область на плоскости Ox_1x_2 с границей ∂Q . Пусть $l \subset Q$ – простая замкнутая или незамкнутая кривая без точек самопересечения класса C^∞ , разбивающая Q

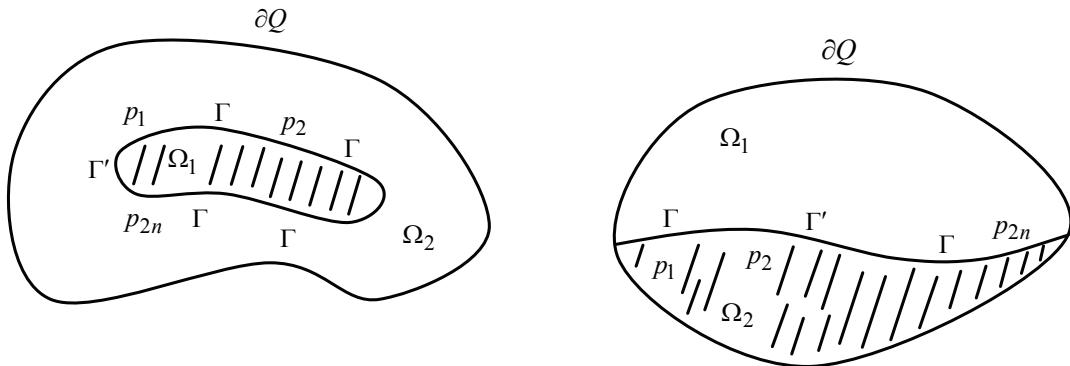
на две области Ω_1 и Ω_2 ; $Q = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup l$. Если l – незамкнутая кривая, то предполагаем, что концевые точки ∂l не совпадают и принадлежат ∂Q : $\partial l \subset \partial Q$. Будем также предполагать, что границы ∂Q , $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ областей Q , Ω_1 , Ω_2 являются простыми, замкнутыми, кусочно-гладкими кривыми, состоящими из конечного числа дуг класса C^∞ , сходящихся под углами, отличными от нулевого.

Пусть $P_i \in l$ – произвольные $2N$ точки $P_i \neq P_j$, разбивающие l на два множества Γ и Γ' так, что $\Gamma = l \setminus \overline{\Gamma'}$, $\Gamma' = l \setminus \overline{\Gamma}$, $\Gamma \cup \Gamma' \cup P_i = l$ ($\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$). Если $N = 0$, то полагаем $\Gamma = l$, $\Gamma' = \emptyset$. Пусть, далее $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, $\Gamma_0 = \partial Q \cup \Gamma'$.

Граница $\partial\Omega$ области Ω в общем случае содержит угловые точки с внутренними углами $0 < \alpha \leq 2\pi$. Угловую точку при $\alpha = 2\pi$ часто называют «ребром». Область Ω удовлетворяет условию конуса [1, 124], что позволит в дальнейшем применять теоремы вложения и теоремы о следах в пространствах Соболева [1, 124].

Будем рассматривать математическую модель регулярной (вдоль оси Ox_3), экранированной волноведущей структуры, попечное сечение которой плоскостью $x_3 = \text{const}$ образовано областью Q . Волновод заполнен двумя однородными изотропными диэлектриками с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_j в области Ω_j ; $\epsilon_j \geq 1$, $\text{Im} \epsilon_j = 0$, $\mu_j = 1$, ($j = 1, 2$). Γ_0 – проекция поверхности идеально проводящих, бесконечно тонких экранов, Γ – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков.

Геометрия рассматриваемой модели охватывает все типы экранированных двухслойных волноведущих структур, используемых на практике: от круглых и прямоугольных частично заполненных волноводов до щелевых, полосковых и компланарных линий передачи [87].



$$\Gamma_0 = \Gamma' \cup \partial Q, \quad \Gamma \cup \Gamma' \cup P_i = l \quad (\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset), \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$$

Рис. 1 Общий вид волноведущих структур двух типов

Задача о нормальных волнах волноведущей структуры состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma x_3}$ от координаты x_3 , вдоль которой структура регулярна [104]:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i \mathbf{H}, \quad X = (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\epsilon \mathbf{E}, \quad x = (x_1, x_2), \\ \mathbf{E}(X) &= (E_1(x)\mathbf{e}_1 + E_2(x)\mathbf{e}_2 + E_3(x)\mathbf{e}_3)e^{i\gamma x_3}, \\ \mathbf{H}(X) &= (H_1(x)\mathbf{e}_1 + H_2(x)\mathbf{e}_2 + H_3(x)\mathbf{e}_3)e^{i\gamma x_3},\end{aligned}\quad (1)$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: обращение в нуль на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$\mathbf{E}_t|_M = 0, \quad (2)$$

непрерывность касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$\begin{aligned}[\mathbf{E}_t]_L &= 0, \\ [\mathbf{H}_t]_L &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

и ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода

$$\int_V (\epsilon |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dX < \infty. \quad (4)$$

Здесь $M = \{X : x \in \Gamma_0\}$ – части границ, занятые идеальным проводником, $L = \{X : x \in \Gamma\}$ – граница раздела сред, а $V \subset \Sigma = \{X : x \in \Omega\}$ – любой конечный объем. Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Осуществлен переход к безразмерным величинам [63, 100]: $k_0 x \rightarrow x$, $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$; $k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$, где ϵ_0 , μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума (временной множитель $e^{i\omega t}$ всюду опущен).

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - i\gamma H_2 = i\epsilon E_1, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - i\gamma E_2 = -iH_1, \quad i\gamma H_1 - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = i\epsilon E_2,$$

$$i\gamma E_1 - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = -iH_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = i\epsilon E_3, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = -iH_3,$$

и выразим функции E_1, H_1, E_2, H_2 через E_3 и H_3 из 1, 2, 4 и 5-го уравнений последней системы, получаем

$$E_1 = \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\gamma \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right), \quad E_2 = \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\gamma \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right), \quad (5)$$

$$H_1 = \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\epsilon \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right), \quad H_2 = \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(-\epsilon \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right); \quad \tilde{k}^2 = \epsilon - \gamma^2.$$

Это всегда возможно, если $\gamma^2 \neq \epsilon_1, \gamma^2 \neq \epsilon_2$.

Из формул (2) следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$\Pi(x_1, x_2) = E_3(x_1, x_2), \quad \Psi(x_1, x_2) = H_3(x_1, x_2).$$

Тем самым задача сводится к нахождению функций Π и Ψ – продольных компонент электрического и магнитного полей.

Для продольных компонент поля Π и Ψ из (1), (2) имеем следующую задачу на собственные значения: найти такие $\gamma \in C$, при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Pi + \tilde{k}^2 \Pi = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\Delta \Psi + \tilde{k}^2 \Psi = 0, \quad \tilde{k}^2 = \tilde{k}_j^2 = \epsilon_j - \gamma^2, \quad (6)$$

удовлетворяющие краевым условиям на Γ_0

$$\Pi \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (7)$$

условиям сопряжения на Γ

$$[\Pi]_\Gamma = 0, \quad [\Psi]_\Gamma = 0,$$

$$\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right]_\Gamma + \left[\frac{\epsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right]_\Gamma = 0,$$

$$\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \right]_{\Gamma} - \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

и условию ограниченности энергии в Ω

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla \Pi|^2 + |\nabla \Psi|^2 + |\Pi|^2 + |\Psi|^2 \right) dx < \infty. \quad (9)$$

Здесь n – орт внешней нормали к Ω_2 , τ – касательный орт, причем $x_1 \times x_2 = \tau \times n$. Квадратные скобки $[f]_{\Gamma} = f_2|_{\Gamma} - f_1|_{\Gamma}$ означают разность следов функций на Γ в областях Ω_2 и Ω_1 . Условие (6) должно выполняться с обеих сторон Γ' .

При выводе (6)–(9) мы использовали представления (5). Условия (7)–(9) являются другой записью условий (2)–(4). Таким образом, продольные компоненты поля нормальной волны удовлетворяют соотношениям (6)–(9). Обратно, зная продольные компоненты поля Π , Ψ как решение задачи (6)–(9), можно определить поперечные составляющие по формулам (5). Определенное так поле E , H удовлетворяет всем условиям (1)–(4). Эквивалентность перехода к задаче (6)–(9) нарушается лишь при $\gamma^2 = \epsilon_1$ или $\gamma^2 = \epsilon_2$; в этом случае требуется отдельное рассмотрение системы (1).

Итак, система уравнений (6) с краевыми условиями (7), условиями сопряжения (8) и условием (9) дают краевую задачу на собственные значения. Особенностью этой задачи является разрывность коэффициента ϵ , а также вхождение спектрального параметра γ в условия сопряжения. Кроме того, граница Γ может содержать «ребра». Все это приводит к необходимости дать специальное определение решения задачи (6)–(9).

Будем искать решения Π и Ψ задачи (6)–(9) в пространствах Соболева [1, 124] соответственно

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f : f \in H^1(\Omega), \quad f|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

и

$$\hat{H}^1(\Omega) = \left\{ f : f \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} f dx = 0 \right\}$$

со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_1 = \int_{\Omega} \nabla f \nabla \bar{g} dx, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1.$$

Тот факт, что полуформа $\|\cdot\|_1$ в $H^1(\Omega)$ является нормой в $H_0^1(\Omega)$ и $\hat{H}^1(\Omega)$ следует из коэрцитивности формы $(f, g)_1$ в этих пространствах [1] (для доказательства коэрцитивности в $H_0^1(\Omega)$ достаточно ограниченности Ω ; для доказательства коэрцитивности в $\hat{H}^1(\Omega)$ необходимо уже использовать условие конуса). Пространства $H_0^1(\Omega)$ и $\hat{H}^1(\Omega)$ можно получить как пополнение по норме $\|\cdot\|_1$ пространств бесконечно дифференцируемых в Ω функций $C_0^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(\Omega)$ (для которых $\|f\|_1 < \infty$). $\hat{H}^1(\Omega)$ – подпространство функций из $H^1(\Omega)$, ортогональных единице.

В силу предположений, сделанных выше, область Ω удовлетворяет условию конуса: существует конус

$$K_0 = \left\{ x : 0 \leq x_1 \leq b, \quad x_2^2 \leq ax_1^2; \quad a > 0, \quad b > 0 \right\}$$

такой, что в любую точку $P \in \Omega$ может быть помещена вершина некоторого конуса K_p , конгруэнтного K_0 , и целиком содержащегося в Ω , $K_p \subset \Omega$. Это свойство позволяет применять теорему Соболева о следах [1] и рассматривать след функции $f \in H^1(\Omega)$ на Γ как элемент пространства $H^{1/2}(\Gamma)$. В силу теоремы о следах запись $f|_{\Gamma_0} = 0$ корректна и подразумевает равенство нулю в $H^{1/2}(\Gamma_0)$. Для всякой функции $f \in H^1(\Omega)$ имеем $[f]_\Gamma = 0$ в смысле $H^{1/2}(\Gamma)$. И наоборот, если $[f]_\Gamma = 0$, $f|_{\Omega_1} \in H^1(\Omega_1)$, $f|_{\Omega_2} \in H^1(\Omega_2)$, то $f \in H^1(\Omega)$. На части границы $\Gamma' \subset \Gamma_0$ теорема о следах применяется с каждой стороны Γ' ; при этом функции $f \in H^1(\Omega)$ имеют, вообще говоря, различный след с разных сторон Γ' . Отметим еще, что имеют место вложения

$$H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\mathcal{Q}) \subset H^1(\mathcal{Q}) \subset H^1(\Omega),$$

причем все вложения не плотные, если $\Gamma' \neq \emptyset$.

Пусть $\Pi \in H_0^1(\Omega)$, $\Psi \in \hat{H}^1(\Omega)$. Равенство нулю в уравнениях (6) в областях Ω_1 и Ω_2 понимается в смысле распределений [123]. Далее, в краевых условиях на Γ_0

$$\Pi_j|_{\Gamma_0 \cap \partial\Omega_j} \in H^{1/2}(\Gamma_0 \cap \partial\Omega_j), \quad \frac{\partial\Psi_j}{\partial n}|_{\Gamma_0 \cap \partial\Omega_j} \in H^{-1/2}(\Gamma_0 \cap \partial\Omega_j).$$

В условиях сопряжения на Γ

$$\Pi|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma), \Psi|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma);$$

$$\left. \frac{\partial \Pi_j}{\partial n} \right|_{\Gamma}, \left. \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma), \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \right|_{\Gamma}, \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

где Π_j и Ψ_j – сужение Π и Ψ на Ω_j .

Дадим другую вариационную формулировку задачи (3)–(9). Умножим уравнения (3) и (4) соответственно на произвольные пробные функции $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ и $\bar{v} \in \hat{H}^1(\Omega)$, считая их пока непрерывно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ (такие функции образуют плотное множество в $H_0^1(\Omega)$ и $\hat{H}^1(\Omega)$), и применим формулу Грина [6] отдельно для каждой области Ω_j . Возможность применения формулы Грина для функций указанных классов обоснована в [6, с. 618]. Получим

$$\int_{\Omega_j} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx - \tilde{k}_j^2 \int_{\Omega_j} \Pi \bar{u} dx = (-1)^j \int_{\partial \Omega_j} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_j} \bar{u} d\tau; \quad (10)$$

$$\int_{\Omega_j} \nabla \Psi \nabla \bar{v} dx - \tilde{k}_j^2 \int_{\Omega_j} \Psi \bar{v} dx = (-1)^j \int_{\partial \Omega_j} \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_j} \bar{v} d\tau; \quad j=1,2. \quad (11)$$

Далее, подставляя значения нормальных производных в (10), (11) по второй формуле из (7) и второй формуле из (8), находим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{k}^2} (\varepsilon \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Psi \nabla \bar{v}) dx - \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx - \\ & - \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{u} \right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вариационное соотношение (12) получено для гладких функций u , v . В §2 будет доказана непрерывность полуторалинейных форм, определяемых интегралами, входящими в (12). Поэтому соотношение (12) распространяется на любые функции $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in \hat{H}^1(\Omega)$ по непрерывности. В (12) и далее в выражениях $\int_{\Gamma} f d\tau$ под f надо понимать след функции на Γ .

Если повторить все рассуждения, взяв $v \equiv 1$, $u \equiv 0$, то получим, что

$$\int_{\Omega} \Psi dx = - \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] d\tau = -\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \int_{\Gamma} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} d\tau = 0, \quad (13)$$

поэтому выбор класса $\hat{H}^1(\Omega)$ не сужает пространства решений задачи (6)–(9). При выводе последнего равенства в (1.13) мы воспользовались тем, что

$$\Pi|_l \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Gamma}), \text{ supp } \Pi|_l \subset \bar{\Gamma},$$

поскольку

$$\Pi \in H_0^1(\Omega),$$

и, следовательно, множество функций $C_0^\infty(\Gamma)$ плотно в $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Gamma})$.

Определение 1. Пару функций

$$\Pi \in H_0^1(\Omega), \Psi \in \hat{H}^1(\Omega) (\|\Pi\|_l + \|\Psi\|_l \neq 0)$$

будем называть собственным вектором задачи (6)–(9), отвечающим характеристическому числу (х.ч) γ_0 , если при $\gamma = \gamma_0$ выполнено вариационное соотношение (12) для любых $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in \hat{H}^1(\Omega)$.

Итак, если $\Pi \in H_0^1(\Omega)$, $\Psi \in \hat{H}^1(\Omega)$ и выполнено (6)–(9), то справедливо вариационное соотношение (12). Верно и обратное утверждение. Выбирая функции u и v с носителем в Ω_j , получаем, что (6) удовлетворяются в смысле распределений. Первое условие из (7), первое условие из (8) и условие (9) выполняются за счет выбора пространств $H_0^1(\Omega)$ и $\hat{H}^1(\Omega)$. Если взять $u \equiv 0$, а носитель v примыкающий к некоторому куску Γ_1 границы Γ_0 , то из (12) с помощью формулы Грина находим [6], что второе условие из (7) также удовлетворяется в смысле распределений. Наконец, выбирая в (12) u и v произвольными на Γ и применяя формулы (10), (11) получаем, что

$$\int_{\Gamma} \left(\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right] \right) \bar{u} d\tau + \int_{\Gamma} \left(\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \right] - \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] \right) \bar{v} d\tau = 0,$$

откуда следует, что второе и третье условия из (8) удовлетворяются в смысле распределений.

Сделаем ряд замечаний о гладкости собственных векторов задачи (6)–(9). Хорошо известно [120, 137], что решения Π , Ψ однородных уравнений Гельмгольца (6) будут бесконечно дифференци-

руемыми в Ω_1 и Ω_2 : $\Pi, \Psi \in C^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, поэтому уравнения (6) удовлетворяются в классическом смысле. В окрестности любого гладкого куска Γ_1 границы Γ_0 условия (7) также выполняются в классическом смысле, и функции Π, Ψ будут бесконечно дифференцируемы вплоть до границы. Поведение Π, Ψ в окрестности угловых точек, не лежащих на границе разрыва ε , подробно исследовано в [111]. Отметим, что свойства гладкости Π, Ψ в дальнейшем не потребуются.

§2 Задача о спектре операторного пучка четвертого порядка

Умножим вариационное соотношение (12) на $\tilde{k}_1^2 \tilde{k}_2^2$ и сгруппируем слагаемые по степеням γ :

$$\begin{aligned} & \gamma^4 \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx + \gamma^2 \left(\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Psi \nabla \bar{v}) dx - \right. \\ & \left. - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx \right) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \gamma \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{u} \right) d\tau + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\int_{\Omega} (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) dx - \int_{\Omega} \left(\nabla \Pi \nabla \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \Psi \nabla \bar{v} \right) dx \right) = 0, \\ & \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad v \in \hat{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $H = H_0^1(\Omega) \times \hat{H}^1(\Omega)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$\begin{aligned} (f, g) &= (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_1, \quad \|f\|^2 = \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_1^2; \quad f, g \in H, \\ f &= (f_1, f_2)^T, \quad g = (g_1, g_2)^T, \quad f_1, g_1 \in H_0^1(\Omega), \quad f_2, g_2 \in \hat{H}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Тогда интегралы, входящие в (14), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем C , заданные на H от аргументов

$$f = (\Pi, \Psi)^T, \quad g = (u, v)^T.$$

Эти формы определяют [106] некоторые линейные ограниченные операторы $T : H \rightarrow H$ по формуле

$$t(f, g) = (Tf, g), \quad \forall g \in H \quad (15)$$

при условии, что сами формы ограничены: $|t(f, g)| \leq C \|f\| \|g\|$.

Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность из оценок

$$\|Tf\|^2 = t(f, Tf) \leq C \|f\| \|Tf\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$\begin{aligned} a_1(f, g) &:= \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla f_1 \nabla \bar{g}_1 + \nabla f_2 \nabla \bar{g}_2) dx = (A_1 f, g), \quad \forall g \in H, \\ a_2(f, g) &:= \int_{\Omega} \left(\nabla f_1 \nabla \bar{g}_1 + \frac{1}{\varepsilon} \nabla f_2 \nabla \bar{g}_2 \right) dx = (A_2 f, g), \quad \forall g \in H, \\ k(f, g) &:= \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla f_1 \nabla \bar{g}_1 + \nabla f_2 \nabla \bar{g}_2) dx = (K f, g), \quad \forall g \in H, \\ s(f, g) &:= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} \bar{g}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \bar{g}_1 \right) d\tau = (S f, g), \quad \forall g \in H. \end{aligned} \quad (16)$$

Ограниченностей форм $a_1(f, g)$ и $a_2(f, g)$ очевидна. Ограниченностя формы $k(f, g)$ следует из неравенства Пуанкаре [1]. Докажем ограниченность формы $s(f, g)$. Предположим дополнительно, что функции $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C^1(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$. В этом случае переходя к двойному интегралу будем иметь

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} \bar{g}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \bar{g}_1 \right) d\tau = \int_{\Omega} \frac{\xi}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial x_1} \right) dx,$$

где

$$\xi = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ -1, & x \in \Omega_2 \end{cases},$$

откуда по неравенству Коши-Буняковского получаем оценку

$$|s(f, g)| \leq \frac{1}{2} \|f\| \|g\|. \quad (17)$$

Остается распространить оценку (17) по непрерывности на любые функции $f, g \in H$.

Замечание 1. В выражении

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} \bar{g}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \bar{g}_1 \right) d\tau$$

под $g_1, g_2, \frac{\partial f_1}{\partial \tau}, \frac{\partial f_2}{\partial \tau}$ следует понимать сужение следов

$$g_1, g_2 \Big|_{\partial \Omega_j} \in H^{1/2}(\partial \Omega_j), \frac{\partial f_1}{\partial \tau}, \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \Big|_{\partial \Omega_j} \in H^{-1/2}(\partial \Omega_j)$$

на Γ [123]. Так как на l

$$f_1 \Big|_{\Gamma'} = 0, g_1 \Big|_{\Gamma'} = 0, \text{ supp } f_1 \subset \bar{\Gamma}, \text{ supp } g_1 \subset \bar{\Gamma},$$

то справедливы формулы интегрирования по частям

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial f_1}{\partial \tau} \bar{g}_2 d\tau = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \tau} f_1 d\tau, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \bar{g}_1 d\tau = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \tau} f_2 d\tau. \quad (18)$$

Теперь вариационную задачу (14) можно записать в операторном виде

$$(L(\gamma)f, g) = 0, \quad \forall g \in H$$

или эквивалентно

$$L(\gamma)f = 0, \quad L(\gamma): H \rightarrow H,$$

$$L(\gamma) := \gamma^4 K + \gamma^2 (A_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)K) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\gamma S + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (K - A_2), \quad (19)$$

причем все операторы пучка $L(\gamma)$ ограничены.

Уравнение (19) – другая запись вариационного соотношения (14). Характеристические числа и собственные векторы пучка совпадают по определению с собственными значениями и собственными векторами задачи (6)–(9) при $\gamma^2 \neq \varepsilon_1, \gamma^2 \neq \varepsilon_2$.

Таким образом, задача о нормальных волнах свелась к изучению спектральных свойств пучка $L(\gamma)$. В связи с этим прежде всего рассмотрим свойства операторов (16).

Утверждение 1. *Операторы A_1, A_2 положительно определены:*

$$I \leq A_1 \leq \varepsilon_{\max} I, \quad \varepsilon_{\max}^{-1} I \leq A_2 \leq I, \quad (20)$$

где $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, I – единичный оператор в H .

Доказательство утверждения элементарно и сводится к проверке неравенств

$$\|f\|^2 \leq (A_1 f, f) \leq \varepsilon_{\max} \|f\|^2,$$

$$\varepsilon_{\max}^{-1} \|f\|^2 \leq (A_2 f, f) \leq \|f\|^2. \#$$

Утверждение 2. Оператор S самосопряжен, $S = S^*$, и

$$-\frac{1}{2}I \leq S \leq \frac{1}{2}I. \quad (21)$$

Самосопряженность S следует из равенства

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} \bar{g}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \tau} \bar{g}_1 \right) d\tau = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \tau} f_2 - \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \tau} f_1 \right) d\tau,$$

которое, в свою очередь, следует из замечания 1 и формул (18). Неравенства (21) следуют из оценки (17). #

Утверждение 3. Оператор $K > 0$ компактный. Для его собственных чисел верна асимптотика

$$\lambda_n(K) = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Ясно, что $(Kf, f) > 0$ при $f \neq 0$, т.к. $\int_{\Omega} (\varepsilon |f_1|^2 + |f_2|^2) dx = 0$ тогда

и только тогда, когда $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ (как элементы $H^1(\Omega)$). Докажем компактность K . Пусть $f_n = (u_n, v_n)^T \rightarrow 0$ слабо в H . Тогда из теоремы Реллиха-Кондрашева о компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, справедливой для областей, удовлетворяющих условию конуса [1, с.144], следует, что $f_n \rightarrow 0$ сильно в $L_2(\Omega)$. Но по неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} \|Kf_n\|^2 &= \left| \int_{\Omega} \varepsilon u_n(\bar{Ku}_n) dx + \int_{\Omega} v_n(\bar{Kv}_n) dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} \varepsilon u_n(\bar{Ku}_n) dx \right| + \left| \int_{\Omega} v_n(\bar{Kv}_n) dx \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_{\max} \left(\int_{\Omega} |u_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |Ku_n|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |v_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |Kv_n|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \varepsilon_{\max} \int_{\Omega} (|u_n|^2 + |v_n|^2) dx \cdot \int_{\Omega} (|Ku_n|^2 + |Kv_n|^2) dx \leq \varepsilon_{\max} \|f_n\|_{L_2} \|Kf_n\|, \\ \|Kf_n\| &\leq \varepsilon_{\max} \|f_n\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и компактность установлена.

Доказательство асимптотики (22) основывается на вариационном принципе Куранта. Из неравенства

$$\int_{\Omega} (\varepsilon |f_1|^2 + |f_2|^2) dx \leq \varepsilon_{\max} \int_{\Omega} (|f_1|^2 + |f_2|^2) dx$$

следует [77], что

$$\lambda_n(K) \leq \varepsilon_{\max} \lambda_n(K_H), \quad n \geq 1,$$

где $\lambda_n(K_H)$ – собственные числа оператора, порожденного формой

$$q(f, g) := \int_{\Omega} (f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2) dx = (K_H f, g), \quad \forall g \in H. \quad (23)$$

Поэтому достаточно вести рассмотрения для K_H . Пусть

$$W = H_0^1(Q) \times H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

тогда $H \subset W$. Рассмотрим оператор $K_w : W \rightarrow W$, определяемый формой (23), но на пространстве W (скалярное произведение и норма те же). Согласно вариационному принципу [77, 137]

$$\lambda_{j+1}(K_H) = \inf_{\substack{(u_1, \dots, u_j) \\ u_i \in L_2(Q)}} \sup_{\substack{f \in H \\ q(f, u_i) = 0}} \frac{q(f, f)}{\|f\|^2} \leq \inf_{\substack{(u_1, \dots, u_j) \\ u_i \in L_2(Q)}} \sup_{\substack{f \in W \\ q(f, u_i) = 0}} \frac{q(f, f)}{\|f\|^2}, \quad j \geq 0,$$

так как \sup в правой части неравенства берется по более широкому множеству. Собственные числа оператора K_w соответствуют задаче для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta \Pi &= \mu \Pi, \quad x \in Q; \Pi|_{\partial Q} = 0; \\ -\Delta \Psi &= \mu \Psi, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_1} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_2} = 0; \\ \mu &= \lambda^{-1}(K_w), \quad \mu_n = \lambda_n^{-1}(K_w) \end{aligned}$$

в областях с кусочно-гладкой границей, для которых асимптотика хорошо известна [119]

$$\mu_n \sim \frac{4\pi n}{\text{mes } Q + \text{mes } \Omega_1 + \text{mes } \Omega_2} = \frac{2\pi n}{\text{mes } Q}, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$\lambda_n(K_w) \sim \frac{\text{mes } Q}{2\pi n}, \quad n \rightarrow \infty; \quad \lambda_n(K) \leq cn^{-1}, \quad n \rightarrow \infty; \quad c > \varepsilon_{\max} \frac{\text{mes } Q}{2\pi}.$$

Утверждение доказано. #

Таким образом, все операторы A_1 , A_2 , K , S самосопряженные, $\text{Ker } K = \{0\}$. Существуют ограниченные самосопряженные обратные операторы $A_j^{-1} : H \rightarrow H$, а также $A_j^{1/2}$, $A_j^{-1/2} : H \rightarrow H$; все эти операторы положительно определены. Отметим, что в нашем

случае из условия $B > 0$ следует $B = B^*$, т.к. гильбертово пространство H рассматривается над полем комплексных чисел.

Из доказанных утверждений непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пучок $L(\gamma)$ самосопряжен, то есть*

$$L^*(\gamma) = L(\bar{\gamma}). \quad (24)$$

Из вариационного соотношения (14) получается

Следствие 2. *Пусть P – проектор такой, что*

$$P(f_1, f_2)^T = (-f_1, f_2)^T,$$

тогда

$$A_1 = PA_1P, \quad A_2 = PA_2P, \quad K = PKP, \quad S = -PSP,$$

и верно

$$L(-\gamma) = PL(\gamma)P. \quad (25)$$

Отметим, что оператор S не только не обратим, но и не может быть фредгольмовым, т.к. $\dim \text{Ker } S = \infty$. Действительно, все функции $f = (f_1, f_2)^T$, для которых следы на Γ равны нулю $f_1|_{\Gamma} = 0$, $f_2|_{\Gamma} = 0$, принадлежат ядру оператора S .

§3 Свойства спектра пучка $L(\gamma)$

Обозначим через $\rho(L)$ резольвентное множество пучка $L(\gamma)$, т.е. совокупность тех $\gamma \in C$, при которых оператор $L(\gamma)$ имеет ограниченный обратный. Спектр $L(\gamma)$ будем обозначать через $\sigma(L)$; $\sigma(L) = C \setminus \rho(L)$.

Дадим ряд определений [77, 78, 107].

Определение 2. *Операторнозначная функция $A(\gamma): H \rightarrow H$, $\gamma \in C$ называется конечномероморфной в точке γ_0 , если существует окрестность этой точки, в которой справедливо разложение (ряд сходится по норме)*

$$A(\gamma) = \sum_{j=-n}^{\infty} (\gamma - \gamma_0)^j A_j(\gamma_0), \quad (26)$$

а операторы $A_{-k}(\gamma_0)$ ($k = 1, \dots, n$) конечномерны. Если $n = 0$, то оператор-функция (о.-ф.) $A(\gamma)$ называется голоморфной в точке γ_0 . Если $A(\gamma)$ конечномероморфна (голоморфна) во всех точках области G , то говорят, что $A(\gamma)$ конечномероморфна (голоморфна) в G .

Будем говорить, что конечномероморфная о.-ф. $A(\gamma)$ фредгольмова с нулевым индексом в точке γ_0 (в области G), если в разложении в ряд Лорана (26) оператор $A_0(\gamma_0)$ (для всех $\gamma_0 \in G$) фредгольмов с нулевым индексом.

Пусть о.-ф. $A(\gamma)$ голоморфна в G . Число γ_0 называется характеристическим числом (х.ч.) о.-ф. $A(\gamma)$, если уравнение $A(\gamma_0)\varphi_0 = 0$ имеет нетривиальные решения $\varphi_0 \neq 0$. Последние называются собственными векторами $A(\gamma)$. Говорят, что векторы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ образуют цепочку присоединенных векторов, если для них выполняются соотношения

$$A(\gamma_0)\varphi_p + \frac{1}{1!} \frac{\partial A(\gamma_0)}{\partial \gamma_0} \varphi_{p-1} + \dots + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p A(\gamma_0)}{\partial \gamma_0^p} \varphi_0 = 0; (p=1, \dots, k). \quad (27)$$

При этом число $k+1$ называют длиной цепочки – оно может быть как конечным, так и бесконечным. Будем говорить, что собственный вектор φ_0 имеет конечный ранг, если наибольшая по длине цепочка, отвечающая φ_0 , имеет длину r .

Определение 3. Канонической системой собственных и присоединенных векторов при $\gamma = \gamma_0$

$$\varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_{m_k}^{(k)}, k=1, 2, \dots$$

называется система, обладающая свойствами:

а) вектор $\varphi_0^{(1)}$ есть собственный вектор, ранг которого достигает возможного максимума $m_1 + 1$;

б) вектор $\varphi_0^{(k)}$ есть собственный вектор, не выражаемый линейно через $\varphi_0^{(k)}, \varphi_0^{(k)}, \dots, \varphi_0^{(k)}$, ранг которого достигает возможного максимума $m_k + 1$;

в) векторы $\varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_{m_k}^{(k)}$ образуют цепочку присоединенных векторов;

г) векторы $\{\varphi_0^{(k)}\}$ образуют базис пространства $\text{Ker}A(\gamma_0)$.

Число $m_1 + m_2 + \dots$ называется алгебраической кратностью х.ч. γ_0 .

Определение 4. Система собственных и присоединенных векторов (с.п.в.) о.-ф. $A(\gamma)$ называется n -кратно полной, если любой набор из n векторов f_0, f_1, \dots, f_{n-1} может быть представлен как предел по норме пространства линейных комбинаций

$$f_{v,N} = \sum_{k=1}^N \sum_p a_{p,N}^{(k)} \Phi_p^{(k,v)}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1, \quad (28)$$

с коэффициентами, не зависящими от v , где

$$\Phi_p^{(k,v)} = \left. \frac{d^v}{dt^v} \right|_{t=0} e^{\gamma_k t} \left(\Phi_p^{(k)} + \Phi_{p-1}^{(k)} \frac{t}{1!} + \dots + \Phi_0^{(k)} \frac{t^p}{p!} \right),$$

γ_k – х.ч. оператор-функции $A(\gamma)$.

В частности, при $n=1$ это определение совпадает с обычным определением полноты с.п.в.. В случае, когда кратности всех собственных векторов равны единице, вектор имеет вид

$$f_{v,N} = \sum_{k=1}^N a_N^{(k)} \gamma_k^v \Phi_0^{(k)}.$$

Мы будем иметь дело с оператор-функциями $A(\gamma)$, х.ч. которых имеют конечную алгебраическую кратность, поэтому определения 2-4 не нуждаются в пояснениях.

Перейдем к исследованию спектра пучка $L(\gamma)$. Иногда будет удобнее рассматривать пучок

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\gamma) &:= A_1^{-1/2} L(\gamma) A_1^{-1/2} = \gamma^4 \tilde{K} + \gamma^2 \left(I - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tilde{K} \right) + \\ &+ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \gamma \tilde{S} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\tilde{K} - \tilde{A}_2 \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где обозначено $\tilde{K} = A_1^{-1/2} K A_1^{-1/2}$, $\tilde{S} = A_1^{-1/2} S A_1^{-1/2}$, $\tilde{A}_2 = A_1^{-1/2} A_2 A_1^{-1/2}$.

Спектры этих пучков совпадают $\sigma(L) = \sigma(\tilde{L})$, а собственные векторы (а также и присоединенные векторы) связаны соотношением

$$\varphi_j(L) = A_1^{-1/2} \varphi_j(\tilde{L}). \quad (30)$$

Операторы \tilde{K} , \tilde{S} , \tilde{A}_2 сохраняют все свойства операторов K , S , A_2 , перечисленные в утверждениях 1–3, с оценками

$$-\frac{1}{2}I \leq \tilde{S} \leq \frac{1}{2}I, \quad \varepsilon_{\max}^{-2} I \leq \tilde{A}_2 \leq I. \quad (31)$$

Свойства спектра пучка $L(\gamma)$ описываются следующими теоремами.

Теорема 1. Спектр пучка $L(\gamma)$ лежит в полосе Π_l , $\sigma(L) \subset \Pi_l$, для некоторого $l > 0$.

Пусть $l > \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$. В области $D_0 = \{ \gamma : |\gamma| > l \}$ рассмотрим о.-ф.

$$F(\gamma) := (\gamma^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2))^{-1} \tilde{L}(\gamma) = \gamma^2 \tilde{K} + I + \gamma^{-1} T(\gamma), \quad (32)$$

где $T(\gamma) = \gamma(\gamma^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2))^{-1} \times ((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)I + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\gamma \tilde{S} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\tilde{K} - \tilde{A}_2))$.

Легко видеть, что в этой области спектры пучков $L(\gamma)$, $\tilde{L}(\gamma)$ и $F(\gamma)$ совпадают, поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для пучка $F(\gamma)$.

О.-ф. $T(\gamma)$ аналитична и ограничена в области D_0 : $\|T(\gamma)\| \leq T_0$, $\gamma \in D_0$. При $|\operatorname{Re} \gamma| > l$ существует и ограничен оператор

$$R(\gamma) = (\gamma^2 \tilde{K} + I)^{-1}$$

его норма имеет вид [76, с.309]

$$\|R(\gamma)\| = \frac{|\gamma^{-2}|}{d(-\gamma^{-2})},$$

где $d(\mu)$ – расстояние от точки μ до спектра оператора \tilde{K} . Тогда $\|R(\gamma)\| = 1$ при $|\gamma''| \leq |\gamma'|$, и

$$\|R(\gamma)\| \leq \frac{|\gamma^{-2}|}{|\operatorname{Im} \gamma^{-2}|} = \frac{|\gamma|^2}{2|\gamma'||\gamma''|} = \frac{1}{2} \left(\frac{|\gamma'|}{|\gamma''|} + \frac{|\gamma''|}{|\gamma'|} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\gamma|}{l} \right)$$

при $|\gamma''| > |\gamma'|$, $\gamma = \gamma' + i\gamma''$. Выберем $l > T_0$, тогда

$$\|\gamma^{-1} T(\gamma) R(\gamma)\| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\gamma|}{l} \right) \frac{T_0}{|\gamma|} < 1,$$

поэтому существует и ограничен оператор

$$F^{-1}(\gamma) = R(\gamma) (I + \gamma^{-1} T(\gamma) R(\gamma))^{-1},$$

а вместе с ним и операторы $\tilde{L}^{-1}(\gamma)$, $L^{-1}(\gamma)$ вне полосы Π_l . Теорема доказана. #

Следствие 3. Резольвентное множество пучка $L(\gamma)$ непусто

$$C \setminus \Pi_l \subset \rho(L).$$

Теорема 2. Спектр пучка $L(\gamma)$ симметричен относительно действительной и мнимой оси

$$\sigma(L) = \overline{\sigma(L)} = -\sigma(L).$$

Если γ_0 – х.ч. пучка $L(\gamma)$ с собственным вектором $f_1 = (\Pi, \Psi)^T$, то числа $-\gamma_0$, $\bar{\gamma}_0$, $-\bar{\gamma}_0$ также будут характеристическими той же кратности для пучка $L(\gamma)$ с собственными векторами $f_2 = (-\Pi, \Psi)^T$, $f_3 = (\bar{\Pi}, \bar{\Psi})^T$, $f_4 = (-\bar{\Pi}, \bar{\Psi})^T$ соответственно.

Первое утверждение теоремы следует из равенств (24), (25). Доказательство второго заключается в простой проверке вариационного соотношения (14) для указанных в теореме случаев. Следует отметить, что присоединенные векторы для точки $\bar{\gamma}_0$ также строятся с помощью операции взятия комплексного сопряжения из соответствующих присоединенных векторов, отвечающих γ_0 . #

Теорема 3. Пусть $\delta = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$,

$$I_0 = \left\{ \gamma : \operatorname{Im} \gamma = 0, \frac{(\delta^2 + 4\varepsilon_1)^{1/2} - |\delta|}{2} \leq |\gamma| \leq \frac{(\delta^2 + 4\varepsilon_2)^{1/2} + |\delta|}{2} \right\}.$$

В области $C \setminus I_0$ спектр пучка $\sigma(L)$ состоит из изолированного множества х.ч. конечной алгебраической кратности. Точки $\gamma_j = \pm\sqrt{\varepsilon_i}$ ($i = 1, 2$) являются точками вырождения пучка $L(\gamma)$: $\dim \ker L(\gamma_j) = \infty$.

Пусть $\gamma = \gamma' + i\gamma''$, $\gamma'' \neq 0$, тогда

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{\gamma''} \left(\gamma A_1 - 2\delta S - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\gamma} A_2 \right) \right] = A_1 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{|\gamma|^2} A_2 \geq I,$$

поэтому [76] оператор

$$L_0(\gamma) := \gamma^2 A_1 - 2\gamma \delta S - \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_2$$

непрерывно обратим, и, следовательно, $L(\gamma)$ фредгольмов как сумма обратимого и компактного оператора, причем $\operatorname{ind} L(\gamma) = 0$.

Введем операторы $A'_l : H \rightarrow H$, где A'_l определяется формой

$$a'_l(f, g) := \int_{\Omega} \xi (\varepsilon \nabla f_1 \nabla \bar{g}_1 + \nabla f_2 \nabla \bar{g}_2) dx = (A'_l f, g), \quad \forall g \in H, \quad (33)$$

а также

$$\tilde{A}'_l = A_l^{-1/2} A'_l A_l^{-1/2}.$$

Для этих операторов справедливы оценки

$$-\varepsilon_{\max} I \leq A'_l \leq \varepsilon_{\max} I, \quad -I \leq \tilde{A}'_l \leq I. \quad (34)$$

Введем обозначение: $p = ((\varepsilon_2 + \varepsilon_1)/2)^{1/2}$.

Для вещественных $\gamma \notin I_0$ верна оценка $|\gamma^2 - p^2| > |\delta|(1 + |\gamma|)$, в силу которой оператор $\tilde{L}_0(\gamma) := A_l^{-1/2} L_0(\gamma) A_l^{-1/2} = (\gamma^2 - p^2)I - 2\gamma\delta\tilde{S} + \delta\tilde{A}'_l$, а вместе с ним и оператор $L_0(\gamma)$ также непрерывно обратимы, а $L(\gamma)$ фредгольмов с нулевым индексом. Здесь использованы оценки (31), (34).

Второе утверждение теоремы следует из того, что вариационное соотношение (14) при $\gamma = \gamma_j$ тождественно равно нулю для функций таких, что

$$\Pi, \Psi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}_0), \int_{\Omega} \Psi dx = 0,$$

при $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ или $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_2$.

Сделаем ряд замечаний к доказанным теоремам.

На практике обычно интересуются вещественными или чисто мнимыми точками спектра $\sigma(L)$, которые физически соответствуют распространяющимся и затухающим волнам. Однако известно, что могут существовать и «комплексные» волны [58, 71] при $\gamma_0 \in \sigma(L)$, $\gamma'_0 \cdot \gamma''_0 \neq 0$ ($\gamma_0 = \gamma'_0 + i\gamma''_0$), поэтому в общем случае в теореме 1 полосу Π_l нельзя заменить множеством

$$\Pi_0 = \{\gamma : (\operatorname{Re} \gamma) \cdot (\operatorname{Im} \gamma) = 0\}.$$

«Комплексные» волны возникают «четверками», как следует из теоремы 2. При однородном заполнении волновода ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) «комплексные» волны отсутствуют.

Из теоремы 3 не следует, что точки спектра (за исключением $\gamma_j = \pm\sqrt{\varepsilon_i}$) действительно существуют. Доказательство существует

вания счетного множества х.ч. с точкой накопления в бесконечности для пучка $L(\gamma)$ будет представлено ниже. Отметим, что в точках $\gamma_j = \pm\sqrt{\varepsilon_i}$ нарушается эквивалентность перехода от краевой задачи о нормальных волнах к задаче для операторного пучка (см. §1), поэтому собственные векторы пучка $L(\gamma)$, отвечающие этим значениям γ_j , необходимо исключить из рассмотрения. Методами теории потенциала [104] можно доказать, что во всех остальных вещественных точках γ пучок $L(\gamma)$ фредгольмов с нулевым индексом, других точек вырождения нет, и, следовательно, конечные точки накопления отсутствуют.

Докажем теорему о существовании дискретного спектра пучка $L(\gamma)$. Предварительно установим справедливость следующего вспомогательного предложения.

Лемма 1. *Если вектор-функция $\varphi(\gamma) = F^{-1}(\gamma)(\gamma^{-1}f_0 + f_1)$, $f_0, f_1 \in H$, аналитична при $|\gamma| \geq R$ для некоторого $R > 0$, то она равномерно ограничена (по норме) на этом множестве.*

Пусть Λ – угол раствора 4θ , содержащий мнимую ось

$$\Lambda = \left\{ \gamma : \left| \arg \gamma - \frac{\pi}{2} \right| < \theta, \left| \arg \gamma - \frac{3\pi}{2} \right| < \theta \right\}.$$

Тогда при всех $\gamma \notin \Lambda$ в силу оценок, полученных при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\|R(\gamma)\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{|\gamma'|}{|\gamma''|} + \frac{|\gamma''|}{|\gamma'|} \right) \leq \frac{1}{2} (1 + \operatorname{ctg} \theta)$$

при $|\gamma''| > |\gamma'|$, и

$$\|R(\gamma)\| = 1$$

при $|\gamma'| \geq |\gamma''|$. Таким образом,

$$\|R(\gamma)\| \leq 1 + \operatorname{ctg} \theta, \quad \gamma \notin \Lambda. \quad (35)$$

Пусть $|\gamma| > R_1 > T_0(1 + \operatorname{ctg} \theta)$, и, по-прежнему, $\gamma \notin \Lambda$. Тогда из (35) будет следовать, что

$$\|F^{-1}(\gamma)\| \leq \|R(\gamma)\| \left(1 - \frac{T_0}{R_1} \|R(\gamma)\| \right)^{-1} \leq \frac{1 + \operatorname{ctg} \theta}{1 - \frac{T_0}{R_1}(1 + \operatorname{ctg} \theta)}. \quad (36)$$

Далее, если вектор-функция $\hat{\phi}(\gamma) := \gamma\varphi(\gamma) = F^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1)$, $f_0, f_1 \in H$, аналитична при $|\gamma| = r > R_1$, то согласно лемме 1.3 из [127]

$$\ln \|\hat{\phi}(\gamma)\| \leq c_1 \ln r + c_2 \int_0^{c_3 r^2} \frac{n(t, \tilde{K})}{t} dt,$$

где $n(t, \tilde{K})$ – количество s -чисел оператора \tilde{K} на интервале (t^{-1}, ∞) . Так как $\lambda_n(K) = O(n^{-1})$, то из [76] $\lambda_n(\tilde{K}) = O(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$, поэтому $n(t, \tilde{K}) = O(t)$, $t \rightarrow \infty$ и

$$\ln \|\hat{\phi}(\gamma)\| \leq c_4 |\gamma|^2. \quad (37)$$

Выберем $\theta < \frac{\pi}{8}$, $R_1 > T_0(1 + \operatorname{ctg} \theta)$. Тогда оценки (36), (37) позволяют применить принцип Фрагмена-Линделефа [130], который утверждает, что из ограниченности $\|\varphi(\gamma)\|$ на сторонах угла Λ , $|\gamma| > R_1$ и аналитичности $\varphi(\gamma)$ следует ограниченность $\varphi(\gamma)$ при всех $|\gamma| > R_1$, включая точки внутри угла Λ , и верна оценка

$$\|\varphi(\gamma)\| \leq \max \left(\frac{(1 + \operatorname{ctg} \theta)(\|f_0\| R_1^{-1} + \|f_1\|)}{1 - \frac{T_0}{R_1}(1 + \operatorname{ctg} \theta)}, \max_{|\gamma|=R_1} \|\varphi(\gamma)\| \right). \quad (38)$$

Таким образом, всюду в области $|\gamma| > R$ вектор-функция $\varphi(\gamma)$ равномерно ограничена по норме. #

Теорема 4. В области $C \setminus I_0$ спектр пучка $L(\gamma)$ представляет собой бесконечное (счетное) изолированное множество х.ч. конечной алгебраической кратности с точкой накопления в бесконечности.

В силу теоремы 3 остается показать, что для любого R спектр $L(\gamma)$ (или $F(\gamma)$) в области $|\gamma| > R$ не пуст.

Предположим, что это не так. Тогда $\varphi(\gamma) = F^{-1}(\gamma)f$ аналитична в области $|\gamma| > R$ при любом $f \in H$. Не ограничивая общности,

можно считать, что $R > \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ и что о.-ф. $F(\gamma)$ непрерывно обратима на контуре $|\gamma| = R$.

Из (38) следует, что

$$\|\varphi(\gamma)\| \leq c \|f\|, |\gamma| \geq R, \forall f \in H,$$

или

$$\|F^{-1}(\gamma)\| \leq c, |\gamma| \geq R.$$

Проинтегрируем тождество

$$(\gamma^2 \tilde{K} + I)^{-1} f - F^{-1}(\gamma) f = (\gamma^2 \tilde{K} + I)^{-1} \frac{1}{\gamma} T(\gamma) F^{-1}(\gamma) f,$$

по контуру Γ_k , охватывающему только одно х.ч. γ_k о.-ф. $\gamma^2 \tilde{K} + I$. В этом случае интеграл от $F^{-1}(\gamma) f$ будет равен нулю, а интегралы от остальных слагаемых – равны вычетам в точке γ_k . Для резольвенты $R(\gamma)$ известно [106] разложение в окрестности γ_k

$$(\gamma^2 \tilde{K} + I)^{-1} = \frac{1}{2\gamma_k} \frac{1}{\gamma - \gamma_k} P_k + S_k(\gamma)$$

($S_k(\gamma)$ аналитична в окрестности γ_k , а P_k – собственный проектор, отвечающий х.ч. γ_k), из которого следует, что

$$P_k(I - \gamma_k^{-1} T(\gamma_k) F^{-1}(\gamma_k)) f = 0.$$

Но $\|T(\gamma) F^{-1}(\gamma)\| \leq T_0 c$, $|\gamma| \geq R$, поэтому при достаточно большом γ_k (такие γ_k всегда можно выбрать, т.к. х.ч. компактного оператора $\tilde{K} > 0$ имеют точку накопления в бесконечности), оператор

$$I - \gamma_k^{-1} T(\gamma_k) F^{-1}(\gamma_k)$$

непрерывно обратим, и, в силу произвольности f , $P_k \tilde{f} = 0$ для всех $\tilde{f} \in H$, что невозможно, т.к. $P_k \neq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. #

Рисунок 2 дает наглядное представление о распределении спектра пучка $L(\gamma)$ на комплексной плоскости.

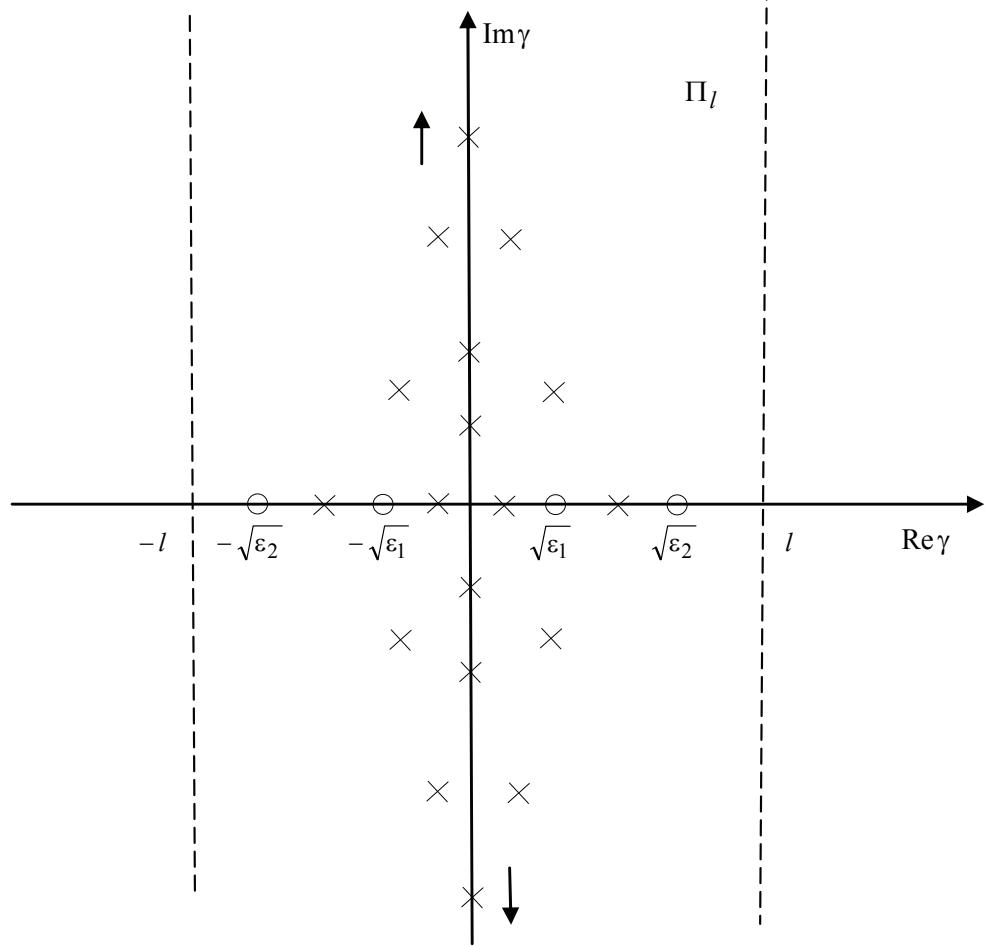


Рис. 2 Распределение спектра пучка $L(\gamma)$ на комплексной плоскости:
 \circ – точки вырождения пучка $L(\gamma)$; x – x.ч. пучка $L(\gamma)$, не равные $\pm\sqrt{\varepsilon_i}$

§4 Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$

Ниже предлагаются два подхода к изучению вопросов полноты системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$. Первый заключается в том, чтобы рассматривать пучок $L(\gamma)$ как возмущение некоторого более простого пучка. Будут рассмотрены два случая. В первом случае исходный пучок представляется как возмущение пучка Келдыша аналитической оператор-функцией; при этом никаких ограничений на параметры пучка не накладывается, но доказывается лишь двукратная полнота по Келдышу с конечным дефектом. Во втором случае доказывается двукратная полнота по Келдышу с.п.в. пучка $L(\gamma)$, но предполагается, что параметр $\delta = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$ достаточно мал.

Второй подход основан на факторизации пучка $L(\gamma)$ относительно специально выбранного контура на комплексной плоскости.

При этом доказывается двукратная полнота по Келдышу с.п.в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч., лежащим вне выбранного контура. Однако снова накладываются некоторые ограничения на параметры пучка. Как будет показано ниже, эти ограничения вызваны существом дела.

Отметим, что пучок $L(\gamma)$ не принадлежит к какому-либо из хорошо изученных классов: пучков Келдыша, гиперболических пучков и т.д. Тем не менее спектральные свойства этого пучка могут быть описаны достаточно полно.

Рассмотрим пучок $L(\gamma)$ в области $D_\eta = \{\gamma : |\gamma| > \eta\}$, где η – произвольное положительное число такое, что $\eta > \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$. Полнота системы с.п.в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. из D_η , эквивалентна полноте системы с.п.в. пучка $F(\gamma)$, также отвечающих х.ч. из D_η . Действительно, спектры пучков в области D_η совпадают, а собственные и присоединенные векторы связаны соотношением

$$\varphi_j^{(k)}(L) = A_l^{-1/2} \varphi_j^{(k)}(F),$$

откуда непосредственно следует эквивалентность вопроса о полноте для систем $\{\varphi_j^{(k)}(L)\}$ и $\{\varphi_j^{(k)}(F)\}$.

Теорема 5. Система с.п.в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. из множества $|\gamma| \geq \eta$, ($\eta \geq 0$, – произвольное неотрицательное число) двукратно полна с конечным дефектом в $H \times H$:

$$\dim \text{coker } \overline{L(\varphi_p^{(k,0)})} < \infty;$$

$$\dim \text{coker } \overline{L(\varphi_p^{(k,1)})} < \infty;$$

здесь $\overline{L(\varphi_p^{(k,v)})}$ означает замыкание линейной оболочки множества векторов $\{\varphi_p^{(k,v)}\}$.

Достаточно доказать утверждение теоремы для пучка $F(\gamma)$ при $\eta > \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$. Пучок $F(\gamma)$ будем рассматривать как возмущение пучка $\gamma^2 \tilde{K} + I$, аналитической в D_η о.-ф. $T_1(\gamma) = \gamma^{-1} T(\gamma)$ с $T_1(\infty) = 0$. В нашем случае оператор $\tilde{K} > 0$ является оператором Гильберта-Шмидта, поэтому выполнены все условия теоремы 1 из

[148], в силу которой система с.п.в. пучка $F(\gamma)$ (а вместе с ним и пучка $L(\gamma)$) двукратно полна с конечным дефектом в $H \times H$, т.е. замыкание линейной оболочки векторов

$$\left(\Phi_p^{(k,0)}, \Phi_p^{(k,1)} \right)^T \in H \times H,$$

где векторы $\Phi_p^{(k,v)}$ взяты из (28), имеет конечный дефект в $H \times H$;
 $\gamma_k \in D_\eta.$ #

При увеличении η размерность дефектного подпространства, вообще говоря, возрастает, поэтому естественно стремиться уменьшить величину η . С другой стороны необходимо исключить из рассмотрения с.п.в., отвечающие х.ч. $\pm\sqrt{\varepsilon_i}$, в которых нарушается эквивалентность перехода к задаче о нормальных волнах. Однако в любом случае размерность дефектного подпространства остается неизвестной. Для приложений важно знать теоремы о полноте системы с.п.в. без дефекта. Ниже приводится такая теорема в предположении, что $\delta = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$ достаточно мало.

Запишем выражение для пучка $L(\gamma)$ в виде

$$\begin{aligned} L(\gamma) = & \left(\gamma^2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right)^2 K - \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right)^2 K + \left(\gamma^2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) A_1 + \\ & + \gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S + \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} A_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_2 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Легко проверить, что

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} A_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 A_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} A'_1,$$

где ограниченный самосопряженный оператор A'_1 определен формулой (33).

Выражение для пучка $\tilde{L}(\gamma)$ запишем в виде

$$\tilde{L}(\gamma) = (p^2 - \gamma^2) \left((p^2 - \gamma^2) \tilde{K} - I \right) + \delta B(\gamma), \quad (40)$$

где

$$B(\gamma) := -2\gamma \tilde{S} - \delta \tilde{K} - \tilde{A}'_1; \quad p = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}}.$$

Спектры пучков $L(\gamma)$ и $\tilde{L}(\gamma)$ совпадают, а с.п.в. связаны формулой (30), из которой следует, что полнота системы с.п.в. пучка $L(\gamma)$ эквивалентна полноте системы с.п.в. пучка $\tilde{L}(\gamma)$.

Теорема 6. Пусть фиксировано произвольное число $M > 1$. Тогда найдется такое $\delta_* = \delta_*(M; \Omega)$, что при любых ε_j , $1 \leq \varepsilon_j \leq M$, для которых $|\delta| < \delta_*$, система с.п.в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. $\gamma_n \neq \pm\sqrt{\varepsilon_i}$, $i = 1, 2$, двукратно полна в $H \times H$.

Достаточно доказать утверждение теоремы для пучка $\tilde{L}(\gamma)$. Пучок $\tilde{L}(\gamma)$ естественно рассматривать как возмущение о.-ф. $\delta B(\gamma)$ более простого пучка

$$F_0(\gamma) = (p^2 - \gamma^2)(p^2 - \gamma^2)\tilde{K} - I = (p^2 - \gamma^2)\tilde{F}(\gamma), \quad (41)$$

где

$$\tilde{F}(\gamma) = (p^2 - \gamma^2)\tilde{K} - I. \quad (42)$$

Спектр $\sigma(\tilde{F})$ лежит на вещественной и мнимой осях и состоит из х.ч. конечной алгебраической кратности с точкой накопления в бесконечности (рис. 3). Собственные векторы пучка $\tilde{F}(\gamma)$ образуют ортонормированный базис в H (теорема Гильберта-Шмидта [109]). Так как $\tilde{K} > 0$, то для х.ч. $\tilde{\gamma}_n$ пучка $\tilde{F}(\gamma)$ справедлива оценка

$$\tilde{\gamma}_n^2 \leq p^2 - \frac{1}{\|\tilde{K}\|}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где обозначено $\tilde{\gamma}_{-n} = -\tilde{\gamma}_n$ и х.ч. нумеруются в порядке убывания $\tilde{\gamma}_n^2$. В силу ограничений, наложенных на коэффициенты ε_j , найдется такое не зависящее от ε_j число $M_0 < 1$, что $p - \tilde{\gamma}_1 \geq 3M_0$. Пусть $|\delta| \leq M_0$. Выберем окружности

$$\Gamma_{\pm} = \left\{ \gamma : |\gamma \mp p| = r; \quad r = p + M_0 - \sqrt{\varepsilon_{\min}} \right\}$$

и рассмотрим пучок $\tilde{L}(\gamma)$ в области D :

$$D = \left\{ \gamma : |\gamma - p| > r, \quad |\gamma + p| > r \right\}.$$

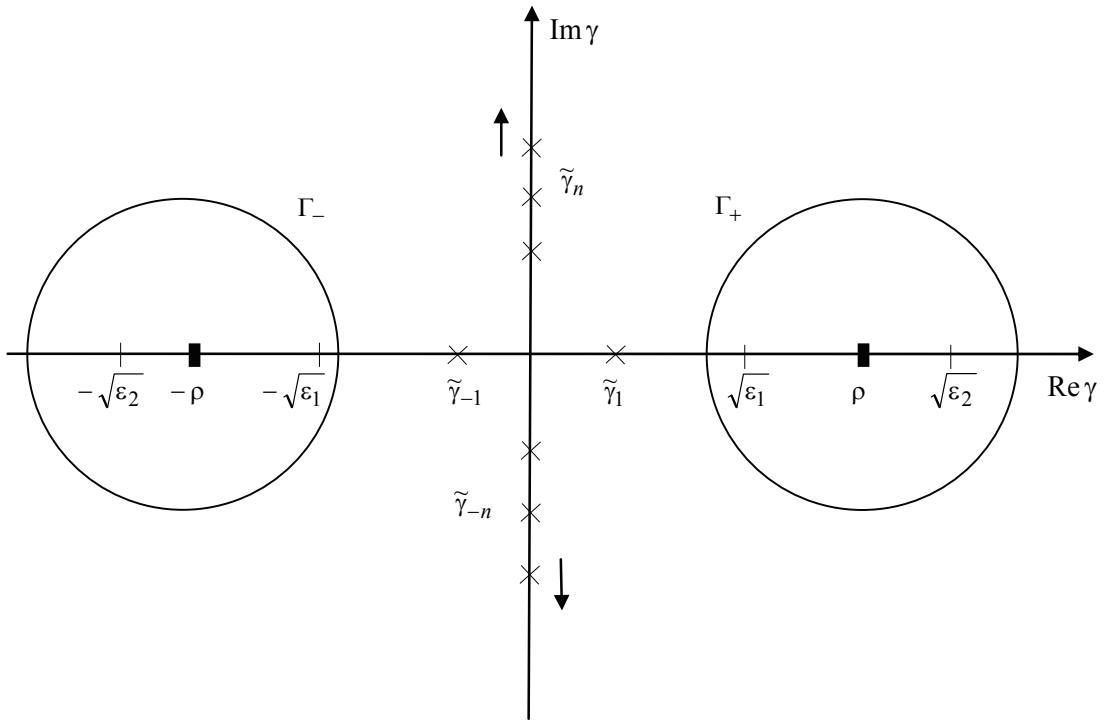


Рис. 3 Спектр оператор-функции $\sigma(\tilde{F})$ x – точки спектра о.-ф. $\tilde{F}(\gamma)$

В этой области содержатся все х.ч. $\tilde{F}(\gamma)$, а пучок $\tilde{L}(\gamma)$ на основании теоремы 3 фредгольмов с нулевым индексом в D . Если $\gamma_0 \in \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, то $|\gamma_0 - \tilde{\gamma}_n| \geq M_0$, $|\gamma_n \pm \sqrt{\varepsilon_i}| \geq M_0$. Поэтому $F_0(\gamma)$ непрерывно обратима на Γ_0 и $\|F_0^{-1}(\gamma)\| \leq C_0$, где C_0 не зависит от ε_j , γ . Далее, $\|B(\gamma)\| \leq B_0$ на контуре Γ_0 , и если потребовать, чтобы $|\delta| < B_0^{-1}C_0^{-1}$, то $\tilde{L}(\gamma)$ также непрерывно обратим на Γ_0 и $\|\tilde{L}^{-1}(\gamma)\| \leq C_1$ равномерно по $\gamma \in \Gamma_0$, $1 \leq \varepsilon_j \leq M$.

Согласно [147] для доказательства двукратной полноты системы с.п.в. фредгольмового пучка $\tilde{L}(\gamma)$, отвечающих х.ч. из области D , достаточно установить, что для любых $f_0, f_1 \in H$ из аналитичности вектор-функции $f(\gamma) = \tilde{L}^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1)$ в D следует, что $f_0 = f_1 = 0$.

Пусть $f(\gamma)$ аналитична в D . Из леммы 1 следует, что о.-ф.

$$F^{-1}(\gamma)(\gamma^{-1}f_0 + f_1) = \frac{\gamma^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\gamma} \tilde{L}^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1)$$

ограничена на бесконечности, поэтому

$$\tilde{L}^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \gamma^{-k}, |\gamma| > R,$$

в окрестности бесконечности. Тогда из тождества и положительности оператора $\tilde{K} > 0$

$$f_0 + \gamma f_1 = \tilde{L}(\gamma) \tilde{L}^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1) = (\gamma^4 \tilde{K} + \dots) \sum_{k=1}^{\infty} g_k \gamma^{-k}$$

находим, что $g_1 = g_2 = 0$, следовательно, $f(\gamma)$ имеет в бесконечности нуль не ниже третьего порядка. Рассмотрим тождество

$$\gamma F_0^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1) - \gamma f(\gamma) = \gamma F_0^{-1}(\gamma) \delta B(\gamma) f(\gamma);$$

$$F_0^{-1}(\gamma)(f_0 + \gamma f_1) - f(\gamma) = F_0^{-1}(\gamma) \delta B(\gamma) f(\gamma)$$

и проинтегрируем их по контуру Γ_0 .

Учитывая, что $f(\gamma)$ имеет в бесконечности нуль не ниже третьего порядка, а также что $\tilde{L}(\gamma)$ и $F_0(\gamma)$ непрерывно обратимы на Γ_0 , в результате интегрирования будем иметь

$$f_0 = \frac{\delta}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \gamma F_0^{-1}(\gamma) B(\gamma) f(\gamma) d\gamma;$$

$$f_1 = \frac{\delta}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} F_0^{-1}(\gamma) B(\gamma) f(\gamma) d\gamma.$$

Следовательно, найдется такое не зависящее от ε_j , γ число $c > 0$, что

$$\|f_0\| \leq |\delta| C (\|f_0\| + \|f_1\|);$$

$$\|f_1\| \leq |\delta| C (\|f_0\| + \|f_1\|),$$

откуда $\|f_0\| = \|f_1\| = 0$, если $|\delta| < (2C)^{-1}$, и $f_0 = f_1 = 0$.

Остается положить

$$\delta_* < \min((2C)^{-1}, M_0, B_0^{-1} C_0^{-1}).$$

Теорема доказана. #

Докажем еще одну теорему о полноте системы с.п.в. пучка $L(\gamma)$, используя метод факторизации.

Теорема 7. Система с. п. в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. $\gamma_n \pm \sqrt{\varepsilon_i}$, двукратно полна в $H \times H$, если

$$\varepsilon_{\max} < 9\varepsilon_{\min} \quad (43a)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\Pi|^2 + |\Psi|^2 \right) dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \Pi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla \Psi|^2 \right) dx, \\ \forall \Pi \in H_0^1(\Omega), \Psi \in \hat{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (43b)$$

Для того чтобы факторизовать пучок $L(\gamma)$, выделим зоны на плоскости γ , где уравнение

$$(L(\gamma)f, f) = 0, \quad (44)$$

в котором форма $(L(\gamma)f, f)$ рассматривается при любом фиксированном $f \neq 0$ как функция γ , имеет определенное число корней. Предварительно установим справедливость двух оценок. С помощью формулы Грина и неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{\Pi} \right) d\tau \right| &= \left| \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_1} \right) dx \right| = \\ &= 2 \left| \int_{\Omega_j} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_2} \right) dx \right| \leq 2 \left| \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_2} \right) dx \right| \leq \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega_j} |\nabla \Pi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_j} |\nabla \Psi|^2 dx \right)^{1/2}; \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{\Pi} \right) d\tau \right|^2 \leq 4 \int_{\Omega_j} |\nabla \Pi|^2 dx \int_{\Omega_j} |\nabla \Psi|^2 dx. \quad (45)$$

Далее рассмотрим уравнение относительно $\sqrt{\varepsilon_j}$:

$$\varepsilon_j P + Q \pm \sqrt{\varepsilon_j} R = 0,$$

где

$$P = \int_{\Omega_j} |\nabla \Pi|^2 dx (\geq 0), \quad Q = \int_{\Omega_j} |\nabla \Psi|^2 dx (\geq 0), \quad R = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{\Pi} \right) d\tau.$$

Имеем

$$R^2 - 4PQ \leq 0$$

в силу оценки (45), поэтому при любых $\sqrt{\varepsilon_j}$

$$\varepsilon_j P + Q \pm \sqrt{\varepsilon_j} R \geq 0.$$

Тем самым доказано, что

$$\int_{\Omega_j} \left(\varepsilon_j |\nabla \Pi|^2 + |\nabla \Psi|^2 \right) dx \pm \sqrt{\varepsilon_j} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{\Pi} \right) d\tau \geq 0, \quad j = 1, 2. \quad (46)$$

Введем сокращенные обозначения и будем считать, что $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$:

$$S := \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \bar{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \bar{\Pi} \right) d\tau, \quad K := \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\Pi|^2 + |\Psi|^2 \right) dx;$$

$$a^{(j)} := \int_{\Omega_j} \left(\varepsilon_j |\nabla \Pi|^2 + |\nabla \Psi|^2 \right) dx, \quad a_2 := \int_{\Omega} \left(|\nabla \Pi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla \Psi|^2 \right) dx.$$

Оценки (46) запишутся в виде

$$a^{(1)} \pm \sqrt{\varepsilon_1} s \geq 0, \quad a^{(2)} \pm \sqrt{\varepsilon_2} s \geq 0. \quad (47)$$

Уравнение (44), согласно (12), можно преобразовать к виду

$$f(\gamma) := \frac{a^{(1)} + \gamma s}{\varepsilon_1 - \gamma^2} + \frac{a^{(2)} - \gamma s}{\varepsilon_2 - \gamma^2} = k, \quad \gamma^2 \neq \varepsilon_j, \quad (48)$$

где $a^{(1)} \geq 0, a^{(2)} \geq 0, k > 0$.

При $\gamma \in (-\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_1})$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{a^{(1)} + \gamma s}{\varepsilon_1 - \gamma^2} &= \frac{a^{(1)} + \sqrt{\varepsilon_1} s}{2\sqrt{\varepsilon_1}(\sqrt{\varepsilon_1} - \gamma)} + \frac{a^{(1)} - \sqrt{\varepsilon_1} s}{2\sqrt{\varepsilon_1}(\sqrt{\varepsilon_1} + \gamma)} \geq \\ &\geq \min \left(\frac{a^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon_1}(\sqrt{\varepsilon_1} - \gamma)}, \frac{a^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon_1}(\sqrt{\varepsilon_1} + \gamma)} \right) > \\ &> \frac{a^{(1)}}{2\varepsilon_1}, \quad (a^{(1)} \neq 0). \end{aligned}$$

Аналогично, при $\gamma \in (-\sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_2})$

$$\begin{aligned} \frac{a^{(2)} - \gamma s}{\varepsilon_2 - \gamma^2} &= \frac{a^{(2)} - \sqrt{\varepsilon_2} s}{2\sqrt{\varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_2} - \gamma)} + \frac{a^{(2)} + \sqrt{\varepsilon_2} s}{2\sqrt{\varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_2} + \gamma)} \geq \\ &\geq \min\left(\frac{a^{(2)}}{\sqrt{\varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_2} + \gamma)}, \frac{a^{(2)}}{\sqrt{\varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_2} - \gamma)}\right) > \frac{a^{(2)}}{2\varepsilon_2}, \quad (a^{(2)} \neq 0). \end{aligned}$$

Таким образом, при $\gamma \in (-\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_1})$ имеем оценку

$$f(\gamma) > \frac{1}{2}\left(\frac{a^{(1)}}{\varepsilon_1} + \frac{a^{(2)}}{\varepsilon_2}\right) = \frac{a_2}{2}.$$

Из этой оценки и из (43) следует, что уравнение (48) (а значит, и (44)) не имеет вещественных корней при $\gamma \in (-\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_1})$. Из представления

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \frac{a^{(1)} + \sqrt{\varepsilon_1} s}{2\sqrt{\varepsilon_1}(\sqrt{\varepsilon_1} - \gamma)} + \frac{a^{(1)} - \sqrt{\varepsilon_1} s}{2\sqrt{\varepsilon_1}(\sqrt{\varepsilon_1} + \gamma)} + \\ &+ \frac{a^{(2)} - \sqrt{\varepsilon_2} s}{2\sqrt{\varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_2} - \gamma)} + \frac{a^{(2)} + \sqrt{\varepsilon_2} s}{2\sqrt{\varepsilon_2}(\sqrt{\varepsilon_2} + \gamma)}, \quad \gamma^2 \neq \varepsilon_j, \end{aligned}$$

заключаем, что если знак в неравенствах (47) строгий, то уравнение (48) имеет по крайней мере по одному корню на интервалах $(-\sqrt{\varepsilon_2}, -\sqrt{\varepsilon_1})$ и $(\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2})$, и не имеет корней при $\gamma \in (-\infty, -\sqrt{\varepsilon_2}) \cup (\sqrt{\varepsilon_2}, +\infty)$, поскольку

$$\lim_{\gamma \rightarrow \sqrt{\varepsilon_j} \mp 0} f(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow -\sqrt{\varepsilon_j} \pm 0} f(\gamma) = \pm\infty, \quad (j = 1, 2)$$

и

$$f(\gamma) < 0, \quad |\gamma| > \sqrt{\varepsilon_2}.$$

Пусть γ_1, γ_2 – определенные выше корни уравнения (44). Найдем остальные два корня уравнения (44) по формулам Виета:

$$\gamma^4 K + \gamma^2 (a_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)K) + \gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (K - a_2) = 0,$$

$$\gamma_{3,4} = -\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta / |\gamma_1 \gamma_2| - (\gamma_1 + \gamma_2)^2}}{2}, \quad (49)$$

где

$$\theta := \frac{a_2}{k} - 1 (1 \leq \theta < +\infty).$$

Учитывая, что $\frac{1}{|\gamma_1 \gamma_2|} \geq \frac{1}{\varepsilon_2}$, $|\gamma_1 + \gamma_2| \leq \sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}$, нетрудно проверить, что найдется такое число $\tilde{\delta} > 0$, зависящее от ε_j , что при $\varepsilon_2 < 9\varepsilon_1$

$$|\gamma_{3,4} - p| > \tilde{r}; \quad \tilde{r} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{2} + \tilde{\delta}, \quad p = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}{2}. \quad (50)$$

Таким образом, в областях

$$\{\gamma : |p - \gamma| < \tilde{r}\}, \quad \{\gamma : |p + \gamma| < \tilde{r}\}$$

уравнение (44) будет иметь ровно по одному вещественному корню на интервалах $(-\sqrt{\varepsilon_2}, -\sqrt{\varepsilon_1})$, $(\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2})$ и два корня в области

$$\{\gamma : |p \pm \gamma| > \tilde{r}\}.$$

Если знак в неравенствах (47) нестрогий, то, учитывая непрерывную зависимость корней уравнения (49) от коэффициентов, заключаем, что

$$\gamma_1 \in [-\sqrt{\varepsilon_2}, -\sqrt{\varepsilon_1}], \quad \gamma_2 \in [\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}], \quad \gamma_{3,4} \in \{\gamma : |p \pm \gamma| \geq \tilde{r}\}.$$

Выберем $\delta_0 = \frac{\tilde{\delta}}{2}$ и обозначим $r = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{2} + \delta_0$,

$$\sigma_+ = \{\gamma : |p - \gamma| < r\}, \quad \sigma_- = \{\gamma : |p + \gamma| < r\}, \quad \sigma_1 = C \setminus (\overline{\sigma_+} \cup \overline{\sigma_-}),$$

$$\sigma_2 = \sigma_+ \cup \sigma_-.$$

По доказанному выше в областях σ_+ , σ_- содержится ровно по одному корню уравнения (44), а в области σ_1 – два корня уравнения (44). Спектр пучка $L(\gamma)$ разбивается на три области: σ_+ , σ_- , σ_1 , причем

$$\sigma(L) \cap \sigma_- \subset [-\sqrt{\varepsilon_2}, -\sqrt{\varepsilon_1}];$$

$$\sigma(L) \cap \sigma_+ \subset [\sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}].$$

Пусть

$$\Gamma_{\pm} = \left\{ \gamma : |\gamma \mp p| = r \right\}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_+ \cup \Gamma_-.$$

Тогда уравнение (44) не имеет корней на Γ_1 , и

$$\inf_{\|f\|=1, \gamma \in \Gamma_1} |(L(\gamma)f, f)| > 0. \quad (51)$$

Оценка (51) и все результаты о спектре пучка $L(\gamma)$ переносятся на пучок $\tilde{L}(\gamma)$. В этом случае пучок $\tilde{L}(\gamma)$ допускает факторизацию относительно контура Γ_1 , т.е. представление в виде

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\gamma) &= L_1(\gamma)L_2(\gamma), \\ L_1(\gamma) &= \gamma^2 \tilde{K} + \gamma \tilde{K}B_1 + I + \tilde{K}\left((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)I + B_2 - B_1^2\right), \\ L_2(\gamma) &= \gamma^2 I + \gamma B_1 + B_2, \end{aligned} \quad (52)$$

причем B_1, B_2 – ограниченные операторы, и

$$\sigma(L_1) \subset \sigma_1, \quad \sigma(L_2) \subset \sigma_2.$$

Это утверждение следует из результатов работы [128], где для непосредственного применения теорем 1 и 2 из [128] необходимо перейти к вспомогательному пучку, выполнив преобразование $t = (p - \gamma)^{-1}$.

Как следует из теоремы Келдыша [107], система с.п.в. пучка $L_1(\gamma)$ двукратно полна в $H \times H$ и, следовательно, система с.п.в. пучка $\tilde{L}(\gamma)$, отвечающих х.ч. $\gamma_n \in \sigma_1$ двукратно полна в $H \times H$, поскольку пучок $L_2(\gamma)$ обратим на множестве $\overline{\sigma_1}$. Остается заметить, что вопрос о полноте с.п.в. пучка $L(\gamma)$ эквивалентен вопросу о полноте с.п.в. $\tilde{L}(\gamma)$. #

Как видно из теорем 6, 7, ограничения, накладываемые на параметры пучка, преследуют цель отделить точки вырождения пучка $L(\gamma)$ от х.ч. конечной кратности и не рассматривать собственные векторы, отвечающие $\pm\sqrt{\varepsilon_i}$. Это необходимо потому, что собственные векторы, отвечающие х.ч. $\pm\sqrt{\varepsilon_i}$, не связаны с задачей о нормальных волнах. Вместе с тем теорема 5 показывает, что набор с.п.в., отвечающих х.ч. вне круга $|\gamma| > \eta$ для любого $\eta > 0$, доста-

точно широк и требует дополнения до двукратно полной системы в $H \times H$ лишь конечным числом элементов.

В разделе 2 будет показано, что в задаче о нормальных волнах нужна именно двукратная полнота системы с.п.в. пучка $L(\gamma)$, а не обычная полнота в H . Некоторые другие достаточные признаки двукратной полноты системы с.п.в. пучка $L(\gamma)$ содержатся в работах автора [94, 165].

Раздел 2. Свойства системы собственных и присоединенных волн волноведущей структуры

Настоящий раздел посвящен изучению свойств системы собственных и присоединенных волн волноведущих структур, описанных в разделе 1. Это свойства полноты, базисности, а также соотношения ортогональности для системы собственных и присоединенных волн. Этими свойствами интересуются главным образом при решении задач возбуждения волноведущей структуры каким-либо источником, поскольку практически все схемы решения таких задач используют перечисленные свойства [93]. Без анализа вопросов полноты, базисности упомянутые схемы остаются необоснованными.

Мы будем рассматривать только основной случай $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, когда задача является векторной. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ задача о распространении волн в волноведущих структурах сводится к двум скалярным и хорошо изучена в работах [153–155].

В §1 дается определение собственных и присоединенных волн структуры с помощью собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$. Показывается, что такое определение эквивалентно обычному определению, которое дается на основе решения системы уравнений Максвелла. Ценность нашего определения заключается в том, что собственные и присоединенные волны строятся только с помощью продольных компонент Π_p , Ψ_p , что позволяет в дальнейшем ограничиться изучением пучка $L(\gamma)$.

В §2 доказывается основная теорема этого раздела о полноте системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн в $L_2^4(\Omega)$. Наиболее важным является тот факт, что именно двукратная полнота (по Келдышу) системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$ в $H \times H$ влечет полноту (в обычном смысле) системы поперечных компонент в $L_2^4(\Omega)$. Эта теорема позволяет применить достаточные признаки двукратной полноты системы с.п.в. пучка $L(\gamma)$, установленные в разделе 1, для анализа вопроса о полноте системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн. Следует подчеркнуть, что изучение свойств системы поперечных компонент связано с известной схемой Л. А. Вайнштейна решения задачи возбуждения волноведущей структуры каким-либо источником [63].

В §3 устанавливаются некоторые соотношения ортогональности для поперечных компонент собственных и присоединенных волн. В простейшем случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, отсутствуют присоединенные волны и граница области Ω кусочно-гладкая, такие соотношения были известны [63]. Доказанные свойства ортогональности позволяют построить биортогональную систему в $L_2^4(\Omega)$ к системе поперечных компонент собственных и присоединенных волн, и тем самым установить не только полноту, но и минимальность этой системы.

Однако, как показано в §4, эта система в общем случае не будет базисом в $L_2^4(\Omega)$. Точнее, доказывается, что если существует бесконечное множество х.ч. пучка $L(\gamma)$ кратности 1 (наиболее простая и распространенная ситуация), то упомянутая выше система не будет базисом Шаудера в $L_2^4(\Omega)$.

Результаты раздела опубликованы в работах [162, 163, 165].

§1 Собственные и присоединенные волны

Ниже сохранены все обозначения раздела 1. Пусть $f_0, f_1, \dots, f_m \in H$ – цепочка с.п.в. пучка $L(\gamma)$, отвечающая х.ч. $\gamma (\gamma^2 \neq \varepsilon_i, i=1,2)$. По векторам $f_p = (\Pi_p, \Psi_p)^T$ построим систему функций, определенных в Ω :

$$\begin{aligned} E_1^{(p)} &= \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Pi_p}{\partial x_1} - iE_1^{(p-1)} \right) - \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial x_2} - iH_2^{(p-1)} \right), \\ E_2^{(p)} &= \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Pi_p}{\partial x_2} - iE_2^{(p-1)} \right) + \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial x_1} - iH_1^{(p-1)} \right), \\ H_1^{(p)} &= \frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Pi_p}{\partial x_2} - iE_2^{(p-1)} \right) + \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial x_1} - iH_1^{(p-1)} \right), \\ H_2^{(p)} &= -\frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Pi_p}{\partial x_1} - iE_1^{(p-1)} \right) + \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial x_2} - iH_2^{(p-1)} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$E_3^{(p)} = \Pi_p, \quad H_3^{(p)} = \Psi_p; \quad E^{(p)} \equiv H^{(p)} \equiv 0 \text{ при } p < 0; \quad \varepsilon = \varepsilon_j \text{ в } \Omega_j; \quad j = 1, 2.$$

Определение 1. Вектор-столбец

$$\tilde{W}^{(p)} = \tilde{V}^{(p)} \exp(i\gamma x_3), \quad \tilde{V}^{(p)} = \left(E_1^{(p)}, E_2^{(p)}, E_3^{(p)}, H_1^{(p)}, H_2^{(p)}, H_3^{(p)} \right)^T,$$

будем называть собственной при $p=0$ или присоединенной при $p \geq 1$ волной (волноведущей структуры), отвечающей х.ч. γ .

Вектор $\tilde{V}^{(p)}$ можно рассматривать как элемент пространства

$$\tilde{H} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times \hat{H}^1(\Omega)$$

с соответствующим скалярным произведением и нормой.

Из результатов раздела 1 следует, что x_3 – компоненты вектора $\tilde{V}^{(0)}$, являются собственными функциями (векторами) задачи о нормальных волнах волноведущей структуры, поэтому данное выше определение собственной волны не отличается от общепринятого. Используемое нами определение присоединенной волны ($p \geq 1$) не является традиционным. Мы строим присоединенную волну с помощью присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$, определение которых, вообще говоря, не связано прямо с задачей (1.1)–(1.4). Обычно поступают иначе. Систему уравнений Максвелла (1.1) можно рассматривать как спектральную задачу для линейного пучка

$$M(\gamma) = M_1 + \gamma M_2,$$

поэтому собственные и присоединенные волны естественно определить как решение задачи

$$(M_1 + \gamma M_2) \dot{V}^{(0)} = 0, \quad (M_1 + \gamma M_2) \dot{V}^{(p)} + M_2 \dot{V}^{(p-1)} = 0, \quad p \geq 1,$$

с соответствующими краевыми условиями и условиями сопряжения. В координатной форме эта задача примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial x_2} - i\gamma \dot{H}_2^{(p)} - i\epsilon \dot{E}_1^{(p)} &= i\dot{H}_2^{(p-1)}, \\ i\gamma \dot{H}_1^{(p)} - \frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial x_1} - i\epsilon \dot{E}_2^{(p)} &= -i\dot{H}_1^{(p-1)}, \\ \frac{\partial \dot{H}_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_1^{(p)}}{\partial x_2} - i\epsilon \dot{E}_3^{(p)} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial x_2} - i\gamma \dot{E}_2^{(p)} + i\dot{H}_1^{(p)} &= i\dot{E}_2^{(p-1)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$i\gamma \dot{E}_1^{(p)} - \frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial x_1} + i\dot{H}_2^{(p)} = -i\dot{E}_1^{(p-1)},$$

$$\frac{\partial \dot{E}_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_1^{(p)}}{\partial x_2} + i\dot{H}_3^{(p)} = 0;$$

$$\dot{E}_\tau^{(p)} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad (3)$$

$$\left[\dot{E}_\tau^{(p)} \right]_\Gamma = \left[\dot{H}_\tau^{(p)} \right]_\Gamma = 0. \quad (4)$$

Точка над функциями используется для отличия от волн (1) в смысле определения 1. Считаем, что

$$\dot{E}^{(p)} \equiv \dot{H}^{(p)} \equiv 0, \quad p < 0. \quad (5)$$

Докажем эквивалентность этих двух определений в случае достаточно гладких функций Π_p , Ψ_p , т.е. установим равенства

$$E_1^{(p)} = \dot{E}_1^{(p)}, \dots, H_3^{(p)} = \dot{H}_3^{(p)}.$$

Пусть выполнено (2)–(5). Тогда из уравнений (2) будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{E}_1^{(p)} &= \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial x_1} - i\dot{E}_1^{(p-1)} \right) - \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial x_2} - i\dot{H}_2^{(p-1)} \right), \\ \dot{H}_2^{(p)} &= -\frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial x_1} - i\dot{E}_1^{(p-1)} \right) + \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial x_2} - i\dot{H}_2^{(p-1)} \right), \\ \dot{E}_2^{(p)} &= \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial x_2} - i\dot{E}_2^{(p-1)} \right) + \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial x_1} - i\dot{H}_1^{(p-1)} \right), \\ \dot{H}_1^{(p)} &= \frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial x_2} - i\dot{E}_2^{(p-1)} \right) + \frac{i\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial x_1} - i\dot{H}_1^{(p-1)} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя представления (6) в третье и шестое уравнения (2), получим

$$\begin{aligned} \Delta \dot{E}_3^{(p)} + \tilde{k}^2 \dot{E}_3^{(p)} - 2\gamma \dot{E}_3^{(p-1)} - \dot{E}_3^{(p-2)} &= 0, \\ \Delta \dot{H}_3^{(p)} + \tilde{k}^2 \dot{H}_3^{(p)} - 2\gamma \dot{H}_3^{(p-1)} - \dot{H}_3^{(p-2)} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (3), (4) следует, что

$$\dot{E}_3^{(p)} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad (8)$$

$$\left[\dot{E}_3^{(p)} \right]_{\Gamma} = \left[\dot{H}_3^{(p)} \right]_{\Gamma} = 0. \quad (9)$$

Далее, из условия

$$\dot{E}_{\tau}^{(p)} \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

используя (6), находим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right]^{-1} \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial n} \right]_{\Gamma} - \gamma \frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} + \\ & + \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \dot{H}_3^{(p-1)}}{\partial n} \right]_{\Gamma} - \frac{\partial \dot{E}_3^{(p-1)}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \dot{H}_3^{(p-2)}}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, из условия

$$\left[\dot{H}_{\tau}^{(p)} \right]_{\Gamma} = 0$$

получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \dot{E}_3^{(p)}}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \gamma \frac{\partial \dot{H}_3^{(p)}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} + \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_3^{(p-1)}}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \\ & + \frac{\partial \dot{H}_3^{(p-1)}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_3^{(p-2)}}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

С другой стороны, присоединенные векторы $f_p = (\Pi_p, \Psi_p)^T$ пучка $L(\gamma)$ удовлетворяют вариационному соотношению

$$\begin{aligned} & -\tilde{k}_1^2 \tilde{k}_2^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \nabla \Pi_p \nabla \bar{u} + \frac{1}{\tilde{k}^2} \nabla \Psi_p \nabla \bar{v} - \varepsilon \Pi_p \bar{u} - \Psi_p \bar{v} \right) dx - \\ & - [\varepsilon] \gamma \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi_p}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \tau} \bar{u} \right) d\tau - [\varepsilon] \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Pi_{p-1}}{\partial \tau} \bar{v} - \frac{\partial \Psi_{p-1}}{\partial \tau} \bar{u} \right) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\gamma \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \Pi_{p-1} \nabla \bar{u} + \nabla \Psi_{p-1} \nabla \bar{v} - (\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2) (\varepsilon \Pi_{p-1} \bar{u} + \Psi_{p-1} \bar{v}) \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\varepsilon \nabla \Pi_{p-2} \nabla \bar{u} + \nabla \Psi_{p-2} \nabla \bar{v} + (4\gamma^2 - \tilde{k}_1^2 - \tilde{k}_2^2) (\varepsilon \Pi_{p-2} \bar{u} + \Psi_{p-2} \bar{v}) \right) dx + \\
& + 4\gamma \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_{p-3} \bar{u} + \Psi_{p-3} \bar{v} \right) dx + \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_{p-4} \bar{u} + \Psi_{p-4} \bar{v} \right) dx = 0, \\
& \forall (u, v)^T \in H ; p = 0, \dots, m. \tag{12}
\end{aligned}$$

Здесь также считаем $\Pi_p \equiv \Psi_p \equiv 0$, если $p < 0$. Выберем

$$u, v \in H_0^1(\Omega'_j), \quad \bar{\Omega}'_j \subset \Omega_j,$$

и применим к (12) формулу Грина, в результате будем иметь

$$\begin{aligned}
& \tilde{k}_1^2 \tilde{k}_2^2 \left(\frac{1}{\tilde{k}^2} \Delta \Pi_p + \Pi_p \right) - 2\gamma \left(\Delta \Pi_{p-1} + (\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2) \Pi_{p-1} \right) - \\
& - \left(\Delta \Pi_{p-2} + (\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 - 4\gamma^2) \Pi_{p-2} \right) + 4\gamma \Pi_{p-3} + \Pi_{p-4} = 0
\end{aligned}$$

в Ω_j и такое же соотношение для Ψ_p . Из этих соотношений индукцией по p получаем, что

$$\begin{aligned}
& \Delta \Pi_p + \tilde{k}^2 \Pi_p - 2\gamma \Pi_{p-1} - \Pi_{p-2} = 0, \\
& \Delta \Psi_p + \tilde{k}^2 \Psi_p - 2\gamma \Psi_{p-1} - \Psi_{p-2} = 0 \text{ в } \Omega_j; \\
& p = 0, 1, \dots, m. \tag{13}
\end{aligned}$$

Варьируя u и v на Γ_0 и на Γ , находим, что

$$\left. \frac{\partial \Psi_p}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m; \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi_p}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{p-1}}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \\
& + \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{p-2}}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \gamma \left. \frac{\partial \Psi_p}{\partial \tau} \right|_{\Gamma} + \left. \frac{\partial \Psi_{p-1}}{\partial \tau} \right|_{\Gamma} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right]^{-1} \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{p-1}}{\partial n} \right]_{\Gamma} + \\ & + \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{p-2}}{\partial n} \right]_{\Gamma} - \gamma \frac{\partial \Pi_p}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial \Pi_{p-1}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} = 0; \quad (15) \\ & p = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Условие $\Pi_p \Big|_{\Gamma_0} = 0$, условия сопряжения $[\Pi_p]_{\Gamma} = [\Psi_p]_{\Gamma} = 0$ и условие ограниченности энергии в Ω выполняются за счет выбора пространств $H_0^1(\Omega)$ и $\hat{H}^1(\Omega)$. Отметим также, что для функций $\dot{H}_3^{(p)} \int_{\Omega} \dot{H}_3^{(p)} dx = 0$, поэтому условие $\int_{\Omega} \Psi dx = 0$, накладываемое на функции Ψ при выборе класса $\hat{H}^1(\Omega)$, не сужает пространства решений.

Сравнивая (7)–(11) и (13)–(15), заключаем, что

$$\dot{E}_3^{(p)} = \Pi_p, \quad \dot{H}_3^{(p)} = \Psi_p, \quad p = 0, 1, \dots, m,$$

откуда, принимая во внимание формулы (1) и (6), следует

$$\dot{E}_1^{(p)} = E_1^{(p)}, \dots, \dot{H}_3^{(p)} = H_3^{(p)} \text{ для всех } p \geq 0. \quad (16)$$

Замечание 1. Если кратность х.ч. γ больше единицы, выбор функций $\dot{E}_3^{(p)}$, $\dot{H}_3^{(p)}$ не является однозначным. Мы считаем, что выбор этих функций производится согласованно с выбором Π_p , Ψ_p . Если отказаться от этого требования, то (16) может не иметь места, но подпространства, состоящие из собственных и присоединенных функций (векторов), отвечающих х.ч. γ , по-прежнему будут совпадать.

Итак, установлена эквивалентность указанных определений присоединенных волн в случае достаточно гладких Π_p , Ψ_p , и тем самым показана естественность определения 1. В проведенном доказательстве нетривиальным является факт равенства

$$\dot{E}_3^{(p)} = \Pi_p, \quad \dot{H}_3^{(p)} = \Psi_p.$$

Формулы (1) заранее выбирались совпадающими с (6). Отметим, что, как и в разделе 1, можно исследовать гладкость функций Π_p , Ψ_p в областях Ω_j .

Следует подчеркнуть, что присоединенные волны (1) строятся только с помощью продольных компонент Π_p , Ψ_p . Это обстоятельство позволяет ограничиться изучением пучка $L(\gamma)$. Собственно в этом и заключался смысл данного выше определения 1.

§2 Полнота системы поперечных компонент собственных и присоединенных волн

Обозначим через $E_t^{(p)} = (E_1^{(p)}, E_2^{(p)})^T$, $H_t^{(p)} = (H_1^{(p)}, H_2^{(p)})^T$ поперечные, а через Π_p , Ψ_p – продольные составляющие собственной или присоединенной волны, отвечающей х.ч. γ . Введем дифференциальные операторы

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2, \quad \nabla' f = \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_2.$$

Докажем справедливость следующих основных формул:

$$-i \int_{\Omega} \left(E_t^{(p)} (-\nabla' \bar{g}) + H_t^{(p)} (\nabla' \bar{f}) \right) dx = \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi_p \bar{f} + \Psi_p \bar{g}) dx; \\ p = 0, 1, \dots, m, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega), \quad g \in \hat{H}^1(\Omega); \quad (17)$$

$$-i \int_{\Omega} \left(\varepsilon E_t^{(p)} (\nabla \bar{f}) + H_t^{(p)} (\nabla \bar{g}) \right) dx = \\ = \gamma \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi_p \bar{f} + \Psi_p \bar{g}) dx + \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi_{p-1} \bar{f} + \Psi_{p-1} \bar{g}) dx; \\ p = 0, 1, \dots, m, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega), \quad g \in \hat{H}^1(\Omega); \quad (18)$$

Компоненты поля $E_t^{(p)}$, $H_t^{(p)}$ определены по формулам (1). Используя (13)–(15), индукцией по p нетрудно проверить, что для $E_t^{(p)}$, $H_t^{(p)}$ справедливы уравнения (2). В частности,

$$\frac{\partial E_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{(p)}}{\partial x_2} + i H_3^{(p)} = \frac{\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial E_2^{(p-1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{(p-1)}}{\partial x_2} \right) + \\ + \frac{i}{\tilde{k}^2} \left(\Delta \Psi_p + \tilde{k}^2 \Psi_p \right) + \frac{1}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial H_1^{(p-1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2^{(p-1)}}{\partial x_2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{\tilde{k}^2} (\Delta \Psi_p + \tilde{k}^2 \Psi_p) + \\
&+ \frac{2\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial E_2^{(p-1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{(p-1)}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial E_2^{(p-2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{(p-2)}}{\partial x_2} \right) = \\
&= \frac{i}{\tilde{k}^2} (\Delta \Psi_p + \tilde{k}^2 \Psi_p - 2\gamma \Psi_{p-1} - \Psi_{p-2}) = 0; \\
&\frac{\partial H_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p)}}{\partial x_2} - i\varepsilon E_3^{(p)} = -\frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} (\Delta \Pi_p + \tilde{k}^2 \Pi_p) - \\
&- \frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial E_1^{(p-1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2^{(p-1)}}{\partial x_2} \right) + \frac{\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial H_2^{(p-1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p-1)}}{\partial x_2} \right) = \\
&= -\frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} (\Delta \Pi_p + \tilde{k}^2 \Pi_p) + \frac{2\gamma}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial H_2^{(p-1)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p-1)}}{\partial x_2} \right) + \\
&+ \frac{1}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\partial H_2^{(p-2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p-2)}}{\partial x_2} \right) = -\frac{i\varepsilon}{\tilde{k}^2} (\Delta \Pi_p + \tilde{k}^2 \Pi_p - 2\gamma \Pi_{p-1} - \Pi_{p-2}) = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что $E_t^{(p)}$, $H_t^{(p)}$ бесконечно дифференцируемы в Ω_1 и Ω_2 , т.к. Π_p , Ψ_p бесконечно дифференцируемы в Ω_1 и Ω_2 , как решения уравнения Гельмгольца (13) с гладкой правой частью. Поэтому проверка уравнений (2) не встречает затруднений. Итак,

$$\frac{\partial E_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{(p)}}{\partial x_2} = -i\Psi_p; \quad (19)$$

$$\frac{\partial H_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p)}}{\partial x_2} = i\varepsilon \Pi_p; \quad p = 0, 1, \dots, m. \quad (20)$$

Далее, поскольку

$$\Pi_p \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

то из (1) последовательно находим, что

$$E_\tau^{(p)} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad H_n^{(p)} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad p = 0, 1, \dots, m. \quad (21)$$

Несколько более сложно проверяется справедливость условий сопряжения

$$\left[E_{\tau}^{(p)} \right]_{\Gamma} = 0; \quad (22)$$

$$\left[H_{\tau}^{(p)} \right]_{\Gamma} = 0; \quad p = 0, 1, \dots, m. \quad (23)$$

Формулы (22), (23) для собственных функций ($p = 0$) сразу следуют из условий (1.8). Пусть (22), (23) верно для функций с индексом $p = 0, 1, \dots, q-1$. Докажем, что тогда они справедливы и для $p = q$. Прежде всего из уравнений (2) находим, что

$$[\varepsilon] E_{\tau}^{(p)} \Big|_{\Gamma} = -i \left[\frac{\partial \Psi_p}{\partial n} \right]_{\Gamma}; \quad (24)$$

$$[\varepsilon] H_{\tau}^{(p)} \Big|_{\Gamma} = i \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_p}{\partial n} \right]_{\Gamma}, \quad p = 0, 1, \dots, q-1 \quad (25)$$

(эти же формулы следуют из представлений (1)). Тогда

$$\begin{aligned} \left[E_{\tau}^{(q)} \right]_{\Gamma} &= i\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \frac{\partial \Pi_q}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} + \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] E_{\tau}^{(q-1)} \Big|_{\Gamma} - \\ &- i \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi_q}{\partial n} \right]_{\Gamma} - \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] H_n^{(q-1)} \Big|_{\Gamma} = \\ &= -i \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\frac{\partial \Pi_{q-1}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} - \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{q-1}}{\partial n} \right]_{\Gamma} - \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{q-2}}{\partial n} \right]_{\Gamma} \right) + \\ &\quad + \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\gamma E_{\tau}^{(q-1)} \Big|_{\Gamma} - H_n^{(q-1)} \Big|_{\Gamma} \right) = \\ &= -i \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\frac{\partial \Pi_{q-1}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} - \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{q-1}}{\partial n} \right]_{\Gamma} - \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{q-2}}{\partial n} \right]_{\Gamma} \right) + \\ &\quad + \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(-\frac{2i\gamma}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{q-1}}{\partial n} \right]_{\Gamma} + i \frac{\partial \Pi_{q-1}}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} - \frac{i}{[\varepsilon]} \left[\frac{\partial \Psi_{q-2}}{\partial n} \right]_{\Gamma} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\left[H_{\tau}^{(q)} \right]_{\Gamma} = i \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \right] \frac{\partial \Pi_q}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + i\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \frac{\partial \Psi_q}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} +$$

$$+ \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\varepsilon E_n^{(q-1)} \Big|_{\Gamma} + \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] H_{\tau}^{(q-1)} \Big|_{\Gamma} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -i \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\frac{\partial \Psi_{q-1}}{\partial \tau} \Big|_\Gamma + \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{q-1}}{\partial n} \right]_\Gamma + \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{q-2}}{\partial n} \right]_\Gamma \right) + \\
&\quad + \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\left(\varepsilon E_n^{(q-1)} \right) \Big|_\Gamma + \gamma H_\tau^{(q-1)} \Big|_\Gamma \right) = \\
&= -i \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(\frac{\partial \Psi_{q-1}}{\partial \tau} \Big|_\Gamma + \frac{2\gamma}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{q-1}}{\partial n} \right]_\Gamma + \frac{1}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{q-2}}{\partial n} \right]_\Gamma \right) + \\
&\quad + \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \right] \left(i \frac{\partial \Psi_{q-1}}{\partial \tau} \Big|_\Gamma + \frac{2i\gamma}{[\varepsilon]} \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{q-1}}{\partial n} \right]_\Gamma + i \left[\varepsilon \frac{\partial \Pi_{q-2}}{\partial n} \right]_\Gamma \right) = 0.
\end{aligned}$$

Теперь можно доказать формулы (17), (18). Применяя формулу Грина, из (19)–(23) получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(E_t^{(p)} (-\nabla' \bar{g}) + H_t^{(p)} (\nabla' \bar{f}) \right) dx = \\
&= \int_{\Omega} \left(\left(-\frac{\partial (\bar{g} E_1^{(p)})}{\partial x_2} + \frac{\partial (\bar{g} E_2^{(p)})}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial E_1^{(p)}}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2^{(p)}}{\partial x_1} \right) \bar{g} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial (\bar{f} H_1^{(p)})}{\partial x_2} - \frac{\partial (\bar{f} H_2^{(p)})}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial H_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p)}}{\partial x_2} \right) \bar{f} \right) dx = \\
&= \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial E_1^{(p)}}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2^{(p)}}{\partial x_1} \right) \bar{g} + \left(\frac{\partial H_2^{(p)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{(p)}}{\partial x_2} \right) \bar{f} \right) dx = \\
&= i \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_p \bar{f} + \Psi_p \bar{g} \right) dx,
\end{aligned}$$

откуда следует (17).

Далее, используя формулы (1), имеем

$$\begin{aligned}
&-i \int_{\Omega} \left(\varepsilon E_t^{(p)} \nabla' \bar{f} + H_t^{(p)} \nabla' \bar{g} \right) dx = \\
&= \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\varepsilon \gamma}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi_p}{\partial x_1} - \frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \left(\frac{\varepsilon \gamma}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi_p}{\partial x_2} + \frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi_p}{\partial x_2} + \frac{\gamma}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_1} + \left(-\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi_p}{\partial x_1} + \frac{\gamma}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_2} \right) dx -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\varepsilon \gamma}{\tilde{k}^2} E_1^{(p-1)} - \frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} H_2^{(p-1)} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \left(\frac{\varepsilon \gamma}{\tilde{k}^2} E_2^{(p-1)} + \frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} H_1^{(p-1)} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} E_2^{(p-1)} + \frac{\gamma}{\tilde{k}^2} H_1^{(p-1)} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_1} + \left(-\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} E_1^{(p-1)} + \frac{\gamma}{\tilde{k}^2} H_2^{(p-1)} \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_2} \right) dx = \\
& = -i\gamma \int_{\Omega} \left(E_t^{(p)} (-\nabla' \bar{g}) + H_t^{(p)} (\nabla' \bar{f}) \right) dx - \\
& -i \int_{\Omega} \left(E_t^{(p-1)} (-\nabla' \bar{g}) + H_t^{(p-1)} (\nabla' \bar{f}) \right) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Pi_p}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Pi_p}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \right) dx = \\
& = -i\gamma \int_{\Omega} \left(E_t^{(p)} (-\nabla' \bar{g}) + H_t^{(p)} (\nabla' \bar{f}) \right) dx - \\
& -i \int_{\Omega} \left(E_t^{(p-1)} (-\nabla' \bar{g}) + H_t^{(p-1)} (\nabla' \bar{f}) \right) dx,
\end{aligned}$$

откуда с помощью (17) устанавливаем справедливость формул (18).

Пусть $L_2^2(\Omega)$ – декартово произведение двух экземпляров пространства $L_2(\Omega)$.

Лемма 1. Для любого элемента $u \in L_2^2(\Omega)$ имеет место разложение

$$u = \varepsilon \nabla f + \nabla' g,$$

для некоторых $f \in H_0^1(\Omega)$, $g \in \hat{H}^1(\Omega)$.

Определим $f \in H_0^1(\Omega)$ из вариационного соотношения

$$\int_{\Omega} u \nabla \bar{\varphi} dx = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla f \nabla \bar{\varphi} dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (26)$$

По теореме Рисса [109] элемент f существует и единственен. Положим

$$v := u - \varepsilon \nabla f; \quad v \in L_2^2(\Omega).$$

Тогда для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, $j = 1, 2$, по определению обобщенных производных

$$\int_{\Omega} (div v) \bar{\varphi} dx = - \int_{\Omega} v (\nabla \bar{\varphi}) dx = - \int_{\Omega} u \nabla \bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \varepsilon \nabla f \nabla \bar{\varphi} dx = 0,$$

следовательно, $\operatorname{div} v = 0$ в Ω_j , $j = 1, 2$, как распределение. Так как $v \in L_2(\Omega_j)$, $\operatorname{div} v = 0$ в Ω_j , то [157] существует след нормальной составляющей вектора на (кусочно-гладкой) границе $\partial\Omega_j$:

$$v \cdot n|_{\partial\Omega_j} \in H^{-1/2}(\partial\Omega_j), \quad j = 1, 2.$$

Из формулы (26) находим, что элемент $f \in H_0^1(\Omega)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta f = \operatorname{div} u \text{ в } \Omega_j, j = 1, 2; \\ f|_{\Gamma_0} = 0, \left[\varepsilon \frac{\partial f}{\partial n} - u \cdot n \right]_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Последнее условие сопряжения эквивалентно условию $[v \cdot n]_\Gamma = 0$. Тогда для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} v) \bar{\varphi} dx = - \int_{\Omega} v (\nabla \bar{\varphi}) dx + \int_{\Gamma} [v \cdot n]_\Gamma \bar{\varphi} d\tau = - \int_{\Omega} u \nabla \bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \varepsilon \nabla f \nabla \bar{\varphi} dx = 0,$$

то есть $\operatorname{div} v = 0$ в Ω как распределение.

Далее определим элемент $g \in \hat{H}^1(\Omega)$ из вариационного соотношения

$$\int_{\Omega} v \nabla' \bar{h} dx = \int_{\Omega} \nabla g \nabla \bar{h} dx, \quad \forall h \in P,$$

где

$$P := \left\{ h : h|_{\Omega_j} \in C^1(\bar{\Omega}_j), j = 1, 2, [h]_\Gamma = 0, \int_{\Omega} h dx = 0 \right\}.$$

По теореме Рисса такой элемент $g \in \hat{H}^1(\Omega)$ существует и единственен, т.к. левая часть (27) есть антилинейный непрерывный функционал на $\hat{H}^1(\Omega)$, а множество P плотно в $\hat{H}^1(\Omega)$.

Всякий элемент $w \in Q$, где

$$Q := \left\{ w : w \in C^1(\bar{\Omega}_j), j = 1, 2, [w]_\Gamma = 0 \right\},$$

можно представить в виде

$$w = \nabla p + \nabla' h, \text{ где } p \in \left\{ p : p \in P, p|_{\Gamma_0} = 0 \right\}, h \in P.$$

Поскольку функции p, h гладкие, это доказывается обычным способом с помощью введения соответствующих криволинейных интегралов [60].

Тогда с учетом того, что $\operatorname{div} v = 0$, (27) эквивалентно вариационному соотношению

$$\int_{\Omega} v \cdot \bar{w} dx = \int_{\Omega} \nabla' g \cdot \bar{w} dx, \forall w \in Q. \quad (28)$$

Но Q плотно в $L_2^2(\Omega)$, поэтому $v = \nabla' g$, и лемма доказана. #

Лемма 2. Для любого элемента $u \in L_2^2(\Omega)$ имеет место разложение

$$u = \nabla' f + \nabla g,$$

для некоторых $f \in H_0^1(\Omega)$, $g \in \bar{H}^1(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Элемент $f \in H_0^1(\Omega)$ определяется из вариационного соотношения

$$\int_{\Omega} u \nabla' \bar{\varphi} dx = \int_{\Omega} \nabla f \nabla \bar{\varphi} dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (29)$$

Далее, полагая

$$v := u - \nabla' f; v \in L_2^2(\Omega),$$

находим, что $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$ в Ω как распределение.

Элемент $g \in H_0^1(\Omega)$ определяем из соотношения

$$\int_{\Omega} v \cdot \nabla \bar{p} dx = \int_{\Omega} \nabla g \nabla \bar{p} dx, \forall p \in \left\{ p : p \in P, p|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

которое эквивалентно

$$\int_{\Omega} v \cdot \bar{w} dx = \int_{\Omega} \nabla g \cdot \bar{w} dx, \forall w \in Q,$$

откуда $v = \nabla g$. #

Обозначим через $L_2^4(\Omega)$ декартово произведение четырех экземпляров пространства $L_2(\Omega)$. Пусть также $(E_{n,t}^{(p)}, H_{n,t}^{(p)})^T$ – поперечные компоненты собственных и присоединенных волн, отвечающих х.ч. γ_n ; $p = 0, 1, \dots, m_n$. Через A обозначим множество индексов, которое пробегает n , $n \in A$. Считаем, что различные собственные векторы

$\Phi_0^{(n)}$ имеют разные индексы n , поэтому допускается случай $\gamma_n = \gamma_m$ при $n \neq m$.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Если система с.п.в. $\left\{ \Phi_p^{(n)} \right\} (p = 0, 1, \dots, m_n)$ пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. γ_n , $n \in A$, двукратно полна в $H \times H$, то система вектор-функций $\left\{ \left(E_{n,t}^{(p)}, H_{n,t}^{(p)} \right)^T \right\}$, $n \in A$, $p = 0, 1, \dots, m_n$, полна в $L_2^4(\Omega)$.

Пользуясь леммами 1, 2 представим произвольный элемент $u \in L_2^4(\Omega)$ в виде

$$u = \begin{pmatrix} \varepsilon \nabla f_2 - \nabla' g_1 \\ \nabla' f_1 + \nabla g_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f_j \in H_0^1(\Omega), \\ g_j \in \bar{H}^1(\Omega); j = 1, 2. \end{array}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что из условий

$$\int_{\Omega} \left(E_{n,t}^{(p)} (\varepsilon \nabla \bar{f}_2 - \nabla' \bar{g}_1) + H_{n,t}^{(p)} (\nabla' \bar{f}_1 + \nabla \bar{g}_2) \right) dx = 0, \quad (30)$$

$$n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n,$$

следует, что $u = 0$.

По формулам (17), (18) уравнения (30) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_p^{(n)} \bar{f}_1 + \Psi_p^{(n)} \bar{g}_1 \right) dx + \gamma_n \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_p^{(n)} \bar{f}_2 + \Psi_p^{(n)} \bar{g}_2 \right) dx + \\ & + \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_{p-1}^{(n)} \bar{f}_2 + \Psi_{p-1}^{(n)} \bar{g}_2 \right) dx = 0, \quad n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n, \end{aligned} \quad (31)$$

или, в другой форме,

$$\left(K \Phi_p^{(n)}, \tilde{f}_0 \right) + \left(K \Phi_p^{(n)} + \gamma_n K \Phi_{p-1}^{(n)}, \tilde{f}_1 \right) = 0, \quad n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n, \quad (32)$$

где $\Phi_p^{(n)} = \left(\Pi_p^{(n)}, \Psi_p^{(n)} \right)^T$, $\tilde{f}_0 = (f_1, g_1)^T$, $\tilde{f}_1 = (f_2, g_2)^T$.

Но с учетом (1.28) выражение (32) эквивалентно условиям

$$\left(K \Phi_p^{(n,v)}, \tilde{f}_v \right) = 0; \quad v = 0, 1; \quad n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n,$$

где $\Phi_p^{(n,0)} = \Phi_p^{(0)}$, $\Phi_p^{(n,1)} = \gamma_n \Phi_p^{(n)} + \Phi_{p-1}^{(n)}$. Тогда из положительности оператора K и двукратной полноты системы $\left\{ \Phi_p^{(n)} \right\}$ в $H \times H$ получаем, что

$$\left(\Phi_p^{(n,v)}, K \tilde{f}_v \right) = 0, \quad n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n,$$

следовательно, $K \tilde{f}_v = 0$, $\tilde{f}_v = 0$; $v = 1, 2$. #

Доказанная теорема сводит вопрос о полноте поперечных компонент собственных и присоединенных волн в $L_2^4(\Omega)$ к вопросу о двукратной полноте с.п.в. пучка $L(\gamma)$ в $H \times H$. Эта задача рассматривалась в разделе 1, где были установлены достаточные признаки двукратной полноты с.п.в. пучка $L(\gamma)$ в $H \times H$. Таким образом, если выполнены условия Теорем 6 или 7, то система поперечных компонент собственных и присоединенных волн полна в $L_2^4(\Omega)$.

Условие $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ использовалось при выводе формул (17), (18), поэтому оно присутствует в теореме 1. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то задача о нормальных волнах перестает быть векторной, «распадается» на две скалярные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и хорошо изучена в работах [153–155].

§3 Свойства ортогональности для собственных и присоединенных волн

Введем обозначения:

$$V_n^{(p)} := \left(E_{n,t}^{(p)}, H_{n,t}^{(p)} \right)^T, \quad W_n^{(p)} := \left(H_{n,t}^{(p)} \times \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \times E_{n,t}^{(p)} \right)^T -$$

поперечные компоненты собственной ($p=0$) или присоединенной ($p \geq 1$) волны и, соответственно, «сопряженной» волны, отвечающей х.ч. γ_n . Скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2^4(\Omega)$:

$$\langle V, W \rangle = \int_{\Omega} V \cdot \bar{W} dx.$$

Докажем следующую основную формулу:

$$(\gamma_n - \gamma_m) \langle V_n^{(p)}, W_m^{(q)} \rangle = \langle V_n^{(p)}, W_m^{(q-1)} \rangle - \langle V_n^{(p-1)}, W_m^{(q)} \rangle; \quad p \geq 0, q \geq 0, \quad (33)$$

где $V_n^{(p)} \equiv 0$, $W_m^{(q)} \equiv 0$ при $p < 0$, $q < 0$.

Выше отмечалось, что для компонент $E_{n,t}^{(p)}$, $H_{n,t}^{(p)}$ справедливы уравнения (2). Тогда, выражая величины $\gamma_n V_n^{(p)}$, $\gamma_m W_m^{(q)}$ из этих уравнений и пользуясь формулами (17), (18), будем иметь

$$\int_{\Omega} \left(\gamma_n V_n^{(p)} \right) \cdot \bar{W}_m^{(q)} dx - \int_{\Omega} V_n^{(p)} \cdot \left(\gamma_m \bar{W}_m^{(q)} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -i \int_{\Omega} \left(H_{m,t}^{(q)} \left(-\nabla' \Pi_p^{(n)} \right) + E_{m,t}^{(q)} \left(\nabla' \Psi_p^{(n)} \right) + E_{n,t}^{(p)} \left(-\nabla' \Psi_q^{(m)} \right) + H_{n,t}^{(p)} \left(\nabla' \Pi_q^{(m)} \right) \right) dx + \\
&\quad + \int_{\Omega} V_n^{(p)} \cdot \bar{W}_m^{(q-1)} dx - \int_{\Omega} V_n^{(p-1)} \cdot \bar{W}_m^{(q)} dx = \\
&= - \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_q^{(m)} \Pi_p^{(n)} + \Psi_q^{(m)} \Psi_p^{(n)} \right) dx + \int_{\Omega} \left(\varepsilon \Pi_p^{(n)} \Pi_q^{(m)} + \Psi_p^{(n)} \Psi_q^{(m)} \right) dx + \\
&\quad + \left\langle V_n^{(p)}, W_m^{(q-1)} \right\rangle - \left\langle V_n^{(p-1)}, W_m^{(q)} \right\rangle = \left\langle V_n^{(p)}, W_m^{(q-1)} \right\rangle - \left\langle V_n^{(p-1)}, W_m^{(q)} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Из формулы (33) находим, что при $p \geq 0, q \geq 0$ справедливы следующие соотношения ортогональности:

$$\left\langle V_n^{(p)}, W_m^{(q)} \right\rangle = 0 \text{ при } \gamma_n \neq \gamma_m. \quad (34)$$

Напомним, что х.ч. с различными индексами могут совпадать:

$$\gamma_n = \gamma_m \text{ при } n \neq m.$$

Теорема 2. Пусть $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, система с.п.в. $\left\{ \Phi_p^{(n)} \right\} (p = 0, 1, \dots, m_n)$ пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. $\gamma_n, n \in A$, двукратно полна в $H \times H$. Тогда система вектор-функций $\left\{ \left(E_{n,t}^{(p)}, H_{n,t}^{(p)} \right)^T \right\}, n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n$, полна и минимальна в $L_2^4(\Omega)$, и существует единственная биортогональная к ней система.

Доказательство. Полнота системы $\left\{ V_n^{(p)} \right\}$ установлена в теореме 1. Минимальность будет следовать из существования биортогональной системы [152]. #

Перенумеруем х.ч. γ_n так, чтобы среди них не было совпадающих, и обозначим их через $\tilde{\gamma}_k, k \in \tilde{A}$. Образуем системы функций:

$$\begin{aligned}
\Lambda(\tilde{\gamma}_k) &:= \bigcup_{n,p: \gamma_n = \tilde{\gamma}_k, 0 \leq p \leq m_n} V_n^{(p)}, \dim \Lambda(\tilde{\gamma}_k) = r_k; \\
Q(\tilde{\gamma}_k) &:= \bigcup_{n,p: \gamma_n = \tilde{\gamma}_k, 0 \leq p \leq m_n} W_n^{(p)}, \dim Q(\tilde{\gamma}_k) = r_k.
\end{aligned}$$

Как видно из (34), для построения биортогональной системы к $\left\{ V_n^{(p)} \right\}, n \in A, p = 0, 1, \dots, m_n$, достаточно построить с помощью системы функций $Q(\tilde{\gamma}_k)$ конечные биортогональные системы к системам $\Lambda(\tilde{\gamma}_k)$ при фиксированном K , а затем их объединить. Будем искать элементы биортогональной системы к $\Lambda(\tilde{\gamma}_k)$ в виде линейных комбинаций элементов системы $Q(\tilde{\gamma}_k)$.

Пусть v_1, \dots, v_r и w_1, \dots, w_r – элементы систем $\Lambda(\tilde{\gamma}_k)$ и $\mathcal{Q}(\tilde{\gamma}_k)$, соответственно. Найдем

$$u_q = \sum_{p=1}^r \bar{a}_{pq} w_p, \quad q = 1, \dots, r,$$

из условий

$$\langle v_p, u_q \rangle = \delta_{pq}, \quad p, q = 1, \dots, r, \quad (35)$$

которые эквивалентны матричному уравнению $GA = I$, где $A := \{a_{pq}\}$, $G := \{\langle v_p, w_q \rangle\}$ – матрицы размера $r \times r$. Определитель матрицы G отличен от нуля в силу полноты системы $\{V_n^{(p)}\}$ в $L_2^4(\Omega)$, поэтому однозначно определяем $A = G^{-1}$. Теорема доказана.

Частный случай соотношений ортогональности (34), когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, отсутствуют присоединенные волны ($p = q = 0$) и граница области Ω кусочно-гладкая, хорошо известен [63]. Задача в этом случае не является векторной.

§4 О базисности системы собственных и присоединенных волн

Принимая во внимание теорему 2, естественно поставить вопрос о базисности системы $\{V_n^{(p)}\}$ в $L_2^4(\Omega)$. Под базисом мы будем всегда понимать базис Шаудера [76]. Предварительно установим справедливость следующих общих предложений.

Лемма 3. *Пусть $\{\varphi_i\}$ – полная нормированная система в гильбертовом пространстве $H(\|\varphi_i\| = 1)$, а система $\{\psi_j\}$ удовлетворяет условиям*

$$(\varphi_i, \psi_j) = N_j \delta_{ij}$$

и

$$0 < C_1 \leq \|\psi_j\| \leq C_2.$$

Тогда, если существует подпоследовательность N_{j_k} последовательности N_j такая, что $N_{j_k} \rightarrow 0$ при $j_k \rightarrow \infty$, то система $\{\varphi_i\}$ не является базисом в H .

Доказательство. Заметим, что все $N_j \neq 0$ в силу полноты системы $\{\varphi_i\}$ в H . Пусть $\{\varphi_i\}$ – базис в H . Образуем систему $\psi'_j = \psi_j / N_j$ биортогональную к $\{\varphi_i\}$: $(\varphi_i, \psi'_j) = \delta_{ij}$. Тогда $\{\psi'_j\}$ то-

же базис в H [76, с. 371]. Но если базис $\{\varphi_i\}$ нормирован, то базис $\{\psi'_j\}$ почти нормирован [76, с. 372]. Вычислим

$$\|\psi'_{j_k}\| = \frac{\|\psi_{j_k}\|}{N_{j_k}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } N_{j_k} \rightarrow 0,$$

при $j_k \rightarrow \infty$. Получаем противоречие с нормированностью $\{\psi'_j\}$.
Лемма доказана. #

Лемма 4. Пусть система $\{\varphi_i\}$ – базис в гильбертовом пространстве H . Тогда система $\{\varphi'_i\}$, $\varphi'_i = \varphi_i / \|\varphi_i\|$ – также базис в H .

Доказательство. Так как $\{\varphi_i\}$ есть базис в H , то для любого φ справедливо разложение в ряд

$$\varphi = \sum_i C_i \varphi_i,$$

сходящийся по норме, и это разложение единственno. Тогда

$$\varphi = \sum_i C_i \|\varphi_i\| \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} = \sum_i C'_i \varphi'_i,$$

где $C'_i = C_i \|\varphi_i\|$. Последнее разложение также сходится по норме пространства H , т.к.

$$\left\| \varphi - \sum_i^N C'_i \varphi'_i \right\| = \left\| \varphi - \sum_i^N C_i \varphi_i \right\| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

Кроме того, если

$$\varphi = \sum_i C'_i \varphi'_i \text{ и } \varphi = \sum_i C''_i \varphi'_i$$

и оба ряда сходятся по норме, то имеем

$$\varphi = \sum_i C_i \varphi_i \text{ и } \varphi = \sum_i C''_i \varphi_i / \|\varphi_i\|.$$

Из единственности разложения по системе $\{\varphi_i\}$ получаем $C_i = C''_i / \|\varphi_i\|$, или $C''_i = C_i \|\varphi_i\| = C'_i$. Таким образом, разложение в ряд по системе $\{\varphi'_i\}$ единственно, поэтому $\{\varphi'_i\}$ есть базис пространства H . Лемма доказана. #

Рассмотрим х.ч. γ кратности 1 и вычислим с помощью (1) и (17) значение скалярного произведения $\langle V^{(0)}, W^{(0)} \rangle$ при $\gamma \neq 0$:

$$\gamma \langle V, W \rangle = 2\gamma \int_{\Omega} (E_1 H_2 - E_2 H_1) dx = - \int_{\Omega} (\varepsilon E_t^2 + H_t^2) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} (E_1(\varepsilon E_1 + \gamma H_2) + E_2(\varepsilon E_2 - \gamma H_1) + H_1(H_1 - \gamma E_2) + H_2(H_2 + \gamma E_1)) dx = \\
& = - \int_{\Omega} (\varepsilon E_t^2 + H_t^2) dx + i \int_{\Omega} (E_t(-\nabla' \psi) + H_t(\nabla' \Pi)) dx = \\
& = - \int_{\Omega} (\varepsilon E_t^2 + H_t^2) dx - \int_{\Omega} (\varepsilon \Pi^2 + \psi^2) dx.
\end{aligned}$$

Здесь $V \equiv V^{(0)}$, $W \equiv W^{(0)}$. Таким образом, для собственных волн, отвечающих х.ч. $\gamma_n \neq 0$ кратности 1 имеем

$$\begin{aligned}
& \langle V_n^{(0)}, W_n^{(0)} \rangle = \\
& = - \frac{1}{\gamma_n} \int_{\Omega} (\varepsilon (E_{n,t}^{(0)})^2 + (H_{n,t}^{(0)})^2) dx - \frac{1}{\gamma_n} \int_{\Omega} (\varepsilon (\Pi_0^{(n)})^2 + (\psi_0^{(n)})^2) dx. \quad (36)
\end{aligned}$$

Аналогично для собственных волн, отвечающих х.ч. γ кратности 1 и таких, что $\gamma \neq \bar{\gamma}$, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\varepsilon |E_t|^2 + |H_t|^2) dx = \\
& = \int_{\Omega} (E_1(\varepsilon \bar{E}_1 + \bar{\gamma} \bar{H}_2) + E_2(\varepsilon \bar{E}_2 - \bar{\gamma} \bar{H}_1) + H_1(\bar{H}_1 - \bar{\gamma} \bar{E}_2) + H_2(\bar{H}_2 + \bar{\gamma} \bar{E}_1)) dx - \\
& \quad - \bar{\gamma} \int_{\Omega} (E_1 \bar{H}_2 - E_2 \bar{H}_1 - H_1 \bar{E}_2 + H_2 \bar{E}_1) dx = \\
& = -i \int_{\Omega} (E_t(-\nabla' \bar{\psi}) + H_t(\nabla' \bar{\Pi})) dx - \bar{\gamma} \overline{\langle \bar{V}, W \rangle} = \int_{\Omega} (\varepsilon |\Pi|^2 + |\psi|^2) dx.
\end{aligned}$$

Как следует из теоремы 1.2, \bar{V} будет поперечной составляющей собственной волны, отвечающей х.ч. $\bar{\gamma}$, поэтому при $\gamma \neq \bar{\gamma}$ в силу (33) находим, что $\langle \bar{V}, W \rangle = 0$. Итак, для собственных волн, отвечающих х.ч. $\gamma_n \neq \bar{\gamma}_n$ кратности 1, имеем

$$\int_{\Omega} (\varepsilon |E_{n,t}^{(0)}|^2 + |H_{n,t}^{(0)}|^2) dx = \int_{\Omega} (\varepsilon |\Pi_0^{(n)}|^2 + |\psi_0^{(n)}|^2) dx. \quad (37)$$

Леммы 3, 4 и формулы (36), (37) позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, спектр пучка $L(\gamma)$ содержит бесконечное множество изолированных х.ч. γ_n кратности 1, $n \in \tilde{A}$, и $\gamma_n \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$. Тогда система вектор-функций $\left\{\left(E_{n,t}^{(p)}, H_{n,t}^{(p)}\right)^T\right\}$, построенная по системе с.п.в. $\left\{\Phi_p^{(n)}\right\}$ ($p = 0, 1, \dots, m_n$) пучка $L(\gamma)$, отвечающих х.ч. γ_n , $n \in A$, $\tilde{A} \subset A$, не является базисом в $L_2^4(\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что система $\left\{V_n^{(p)}\right\}$, $p = 0, 1, \dots, m_n$, $n \in A$, является базисом в $L_2^4(\Omega)$. Построим нормированную систему $\left\{\hat{V}_n^{(p)}\right\}$, $\hat{V}_n^{(p)} := V_n^{(p)} / \|V_n^{(p)}\|$. По лемме 4 эта система также будет базисом в $L_2^4(\Omega)$.

С помощью линейных комбинаций элементов системы $\left\{W_n^{(p)}\right\}$, $p = 0, 1, \dots, m_n$, $n \in A$, как при доказательстве теоремы 2, построим (единственную) биортогональную систему $\left\{\tilde{W}_n^{(p)}\right\}$ к базису $\left\{\hat{V}_n^{(p)}\right\}$.

Положим

$$\hat{W}_n^{(p)} = \begin{cases} \tilde{W}_n^{(p)}, & n \notin \tilde{A}, \\ \frac{W_n^{(0)}}{\|W_n^{(0)}\|}, & n \in \tilde{A} \quad (p = 0). \end{cases}$$

При $n, m \in \tilde{A}$ имеем

$$\langle \hat{V}_n^{(0)}, \hat{W}_m^{(0)} \rangle = \delta_{nm} N_n, \quad N_n := \langle V_n^{(0)}, W_n^{(0)} \rangle / \|V_n^{(0)}\|^2,$$

поскольку $\|W_n^{(p)}\| = \|V_n^{(p)}\|$.

Из формул (36), (37) для достаточно больших n , когда $\gamma_n \neq \bar{\gamma}_n$ (см. теоремы 1.1, 1.4), получаем

$$\begin{aligned} |N_n| &\leq \varepsilon_{\max} |\gamma_n|^{-1} \frac{\int_{\Omega} \left(\varepsilon |E_{n,t}^{(0)}|^2 + |H_{n,t}^{(0)}|^2 \right) dx + \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\Pi_0^{(n)}|^2 + |\Psi_0^{(n)}|^2 \right) dx}{\int_{\Omega} \left(\varepsilon |E_{n,t}^{(0)}|^2 + |H_{n,t}^{(0)}|^2 \right) dx} = \\ &= 2\varepsilon_{\max} |\gamma_n|^{-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in \tilde{A}$.

Тем самым для систем $\{\widehat{V}_n^{(p)}\}, \{\widehat{W}_n^{(p)}\}$ выполнены условия леммы 3, поэтому $\{\widehat{V}_n^{(p)}\}$ не может быть базисом в $L_2^4(\Omega)$. Полученное противоречие доказывает теорему. Теорема доказана. #

В теореме 3 описана наиболее простая ситуация, когда существует бесконечное множество х.ч. кратности 1 (что имеет место, например, в частично заполненных прямоугольных и круглых волноводах). Доказательство аналогичного утверждения в общем случае встречает определенные технические трудности. Но уже теорема 3 показывает отсутствие, вообще говоря, свойства базисности системы $\{V_n^{(p)}\}$ для данного круга задач.

Свойством базисности именно для поперечных компонент собственных и присоединенных волн интересуются главным образом в связи со схемой Л. А. Вайнштейна [63] решения задач возбуждения волноводов, где это свойство фактически постулируется. Интересно отметить, что базисности нет даже в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, однако за счет разделения системы на E - и H -волны можно показать, что имеет место базис из подпространств, поэтому разложения в [63] будут верны. При $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ задача «не распадается» на скалярные задачи, остается векторной, и построение базиса из подпространств (с учетом возможных присоединенных волн) затруднительно.

Очевидно, не имеет смысла ставить вопрос о базисности системы собственных и присоединенных волн $\{\tilde{V}_n^{(p)}\}$ в \tilde{H} , т.к. поперечные и продольные компоненты волн не являются независимыми и связаны соотношениями (1).

Глава 2. Метод оператор-функций

Раздел 1. Интегральные оператор-функции, отвечающие задаче о нормальных волнах волноведущей структуры

В предыдущей главе подробно исследовались общие свойства задачи о нормальных волнах методом операторных пучков. Следующие главы посвящены другому методу изучения электромагнитных колебаний в волноведущих структурах – методу оператор-функций. Этот метод больше ориентирован на получение численных результатов, поэтому в дальнейшем несколько сузим рассматриваемый класс структур, учитывая практические приложения. Отметим, что метод позволяет получать и результаты теоретического характера.

Цель этого раздела – вывести и проанализировать интегральную оператор-функцию, эквивалентную задаче о нормальных волнах в классической постановке. При этом оператор-функция определяется системой интегральных уравнений, нелинейно зависящей от спектрального параметра.

С помощью функций Грина выводится интегральная оператор-функция, отвечающая краевой задаче о нормальных волнах. Строится система двух интегральных уравнений, относительно следов функций, описывающих поля на линии разрыва диэлектрика. Доказывается, что первое уравнение имеет логарифмическую особенность, а второе – сингулярную, и исследуется гладкость регулярной части системы, не содержащей особенности. Доказывается спектральная эквивалентность задачи на собственные значения для интегральной оператор-функции и исходной краевой задачи на собственные значения.

Результаты раздела опубликованы в работах [3, 39, 41, 45, 98].

§1 Интегральная оператор-функция, отвечающая краевой задаче на собственные значения. Теорема эквивалентности

Ниже мы будем рассматривать только случай, когда линия разрыва диэлектрической проницаемости лежит на прямой. Для того чтобы подчеркнуть это отличие от общего случая, введем некоторые новые обозначения. Пусть $x = x_1$, $y = x_2$, $\Omega_1 \subset \{y > 0\}$,

$$\Omega_2 \subset \{y < 0\}, \quad X := l \subset \{y = 0\}, \quad \omega := \Gamma \equiv \bigcup_{i=1}^N (a_{2i-1}, a_{2i}) \subset X; \quad a_i < a_{i+1},$$

$i = 1, \dots, 2N - 1$ ($N \geq 1$). В разделе 1 было дано определение решения задачи о нормальных волнах. Согласно этому определению решение

$$\Pi, \Psi \in C^2(\Omega_j) \cap C^1(\bar{\Omega}_j / \partial\omega), \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяет уравнениям Гельмгольца в областях Ω_j :

$$\begin{cases} \Delta\Pi + \tilde{k}^2\Pi = 0, (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \Delta\Psi + \tilde{k}^2\Psi = 0, (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \end{cases} \quad (1)$$

краевым условиям на границе Γ_0 :

$$\Pi|_{\Gamma_0} = 0, \frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad (2)$$

условиям сопряжения на линии раздела сред:

$$\begin{aligned} [\Pi]_\omega &= [\Psi]_\omega = 0, \\ \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial\Pi}{\partial x} \right]_\omega - \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right]_\omega &= 0, \\ \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right]_\omega + \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial\Pi}{\partial y} \right]_\omega &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

условиям на ребрах [136]:

$$|\Pi| < c\rho^\beta, |\Psi| < c, |\nabla\Pi| < \frac{c}{\rho^\alpha}, |\nabla\Psi| < \frac{c}{\rho^\alpha}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (4)$$

ρ – расстояние до ребра.

Дополнительно предположим, что следы функций $\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}$ на множестве ω принадлежат классу Гельдера H^*

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x}\Big|_\omega, \frac{\partial\Psi}{\partial y}\Big|_{\omega_+}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}\Big|_{\omega_-} \in H^* = H^*(\omega), \quad (5)$$

где H^* – класс функций, заданных на ω и представимых в виде

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{\prod_{v=1}^{2N} |a_v - t|^\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad \varphi^* \in H_\mu,$$

H_μ – множество функций, удовлетворяющих на ω условию Гельдера с показателем μ , $0 < \mu \leq 1$ [141]. Ниже будет доказано, что условие (5) является следствием (1)–(4), поэтому мы не сужаем класса решений, накладывая это дополнительное условие.

Рассмотрим теперь краевую задачу (1)–(5). Пусть пара Π, Ψ – решение этой задачи. Выразим значения Π и Ψ внутри Ω_j через значения, которые эти функции или их нормальные производные принимают на границе $\partial\Omega_j$.

Пусть $G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0)$, $G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0)$ – функции Грина соответственно первой и второй краевой задачи для уравнений Гельмгольца (1) с коэффициентами \tilde{k}_j^2 в области Ω_j ; $j = 1, 2$. Обозначим через Π_j и Ψ_j значения Π и Ψ в области Ω_j . Тогда по второй формуле Грина с учетом краевых условий (2) будем иметь следующие интегральные представления

$$\Psi_j(x, y) = (-1)^j \int_{\omega} G_j^\Psi(x, y, x_0, 0) \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} \Psi_j(x_0, y_0) dx_0; \quad (x, y) \in \Omega_j; \quad (6)$$

$$\Pi_j(x, y) = (-1)^{j+1} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0) \Pi_j(x_0, 0) dx_0; \quad (x, y) \in \Omega_j. \quad (7)$$

Отложив пока обоснование законности предельного перехода под знаком интеграла, с помощью (6), (7) получим систему интегральных уравнений на ω .

Считая, что $\gamma \neq 0$, введем новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \frac{\partial \Pi_1(x_0, 0)}{\partial x_0} = \frac{\partial \Pi_2(x_0, 0)}{\partial x_0}, \\ \chi(x_0) &= \frac{\gamma}{\tilde{k}_1^2} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} \Psi_1(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon_1}{\tilde{k}_1^2} \frac{\partial \Pi_1(x_0, 0)}{\partial x_0} = \\ &= \frac{\gamma}{\tilde{k}_2^2} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} \Psi_2(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon_2}{\tilde{k}_2^2} \frac{\partial \Pi_2(x_0, 0)}{\partial x_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Последняя запись корректна, т.к. в силу (3)

$$\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{\omega} = \gamma^2 \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right]_{\omega} = \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right]_{\omega}. \quad (9)$$

Перепишем представления (6), (7) в виде

$$\gamma \Psi_j(x, y) = (-1)^j \int_{\omega} G_j^{\Psi}(x, y, x_0, 0) (\varepsilon_j \varphi(x_0) + \tilde{k}_j^2 \chi(x_0)) dx_0, \quad (x, y) \in \Omega_j; \quad (10)$$

$$\Pi_j(x, y) = (-1)^j \int_{\omega} \tilde{G}_j^{\Pi}(x, y, x_0, 0) \varphi(x_0) dx_0, \quad (x, y) \in \Omega_j, \quad (11)$$

где

$$\tilde{G}_j^{\Pi}(x, y, x_0, 0) = \int_c^{x_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_j^{\Pi}(x, y, t, y_0) dt -$$

какая-либо первообразная подынтегральной функции по переменной t . При выводе (11) произведено интегрирование по частям с учетом того, что $\Pi_j(a_v, 0) = 0$, $v = 1, \dots, 2N$.

Теперь, подставляя (9) и (10) во второе и четвертое уравнения (3), получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\tilde{k}_1^2 G_1^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) + \tilde{k}_2^2 G_2^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 G_1^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon_2 G_2^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) \right) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega; \quad (12) \\ & \int_{\omega} \left(\hat{G}_1^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) + \hat{G}_2^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 \theta_1(x, x_0) + \varepsilon_2 \theta_2(x, x_0) \right) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega; \quad (13) \end{aligned}$$

здесь обозначено

$$\begin{aligned} G_j^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} G_j^{\Psi}(x, y, x_0, 0), \\ \hat{G}_j^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} G_j^{\Psi}(x, y, x_0, 0), \\ \theta_j(x, x_0) &= \frac{1}{\tilde{k}_j^2} \left(\hat{G}_j^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{G}_j^{\Pi}(x, y, x_0, 0) \right). \end{aligned}$$

К уравнениям (12), (13) следует добавить условия

$$\int_{\omega_v} \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad v = 1, \dots, N; \quad \omega_v = (a_{2v-1}, a_{2v}), \quad (14)$$

которые получаются из соотношений

$$\int_{\omega_v} \varphi(x_0) dx_0 = \int_{\omega_v} \frac{\partial \Pi_j(x_0, 0)}{\partial x_0} dx_0 = \Pi_j(a_{2v}, 0) - \Pi_j(a_{2v-1}, 0) = 0.$$

Система интегральных уравнений (12), (13) вместе с дополнительными условиями (14) получена как следствие задачи (1)–(5). Ниже будет доказана эквивалентность этой системы исходной краевой задаче.

Замечание. Если $\gamma = 0$, то задача (1)–(5) распадается на две независимые скалярные задачи для функций Π и Ψ . При этом возникают два интегральных уравнения, аналогичных (12). Этот случай значительно проще, чем тот, который рассматривается в работе, и мы не будем на нем останавливаться, тем более что сколь угодно малым изменением параметров задачи можно добиться того, чтобы точка $\gamma = 0$ стала регулярной точкой задачи (1)–(5).

§2 Некоторые свойства функций Грина и интегралов типа потенциалов

Исследуем некоторые свойства функций Грина G_j^Π , G_j^Ψ . Для определенности рассмотрим область Ω_1 . Пусть Ω_1^* – область, симметричная Ω_1 относительно оси Ox . Образуем область $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup X = \Omega^{(1)}$, где X определено в §1; $\Omega^{(1)}$ – область со строго липшицевыми границами. Пусть $g_1^\Pi(x, y, x_0, y_0)$, $g_1^\Psi(x, y, x_0, y_0)$ – функции Грина для уравнения Гельмгольца $\Delta u + \tilde{k}_1^2 u = 0$ первой и второй краевой задачи в области $\Omega^{(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} G_1^\Pi(x, y, x_0, y_0) &= g_1^\Pi(x, y, x_0, y_0) - g_1^\Pi(x, y, x_0, -y_0), \\ G_1^\Psi(x, y, x_0, y_0) &= g_1^\Psi(x, y, x_0, y_0) + g_1^\Psi(x, y, x_0, -y_0). \end{aligned} \quad (15)$$

По определению функций g_1^Π , g_1^Ψ справедливы представления $(\tilde{k}_1^2 \neq 0)$ [73]

$$g_1^{\Pi, \Psi}(x, y, x_0, y_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\tilde{k}_1 r) + N_1^{\Pi, \Psi}(x, y, x_0, y_0), \quad (16)$$

где $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля, $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}^{(1)}$, $(x, y) \in \Omega^{(1)}$; $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, а функции $N_1^{\Pi, \Psi}$ бесконечно дифферен-

цируемы в $\Omega^{(1)} \times \Omega^{(1)}$ по совокупности аргументов, т.к. они являются решениями уравнения Гельмгольца (1) по каждой из переменных. Функция $-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\tilde{k}_1 r)$ является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца $\Delta u + \tilde{k}_1^2 u = 0$ [73, с. 204] (параметр \tilde{k}_1 может быть и комплексным).

Замечание. Под $H_0^{(1)}(\tilde{k}_1 r)$ мы понимаем однозначную аналитическую ветвь на разрезанной вдоль луча $\{\operatorname{Im} \tilde{k}_1 \leq 0, \operatorname{Re} \tilde{k}_1 = 0\}$ плоскости параметра \tilde{k}_1 , являющуюся аналитическим продолжением функции $H_0^{(1)}(\tilde{k}_1 r)$ с вещественным $\tilde{k}_1 > 0$. Точки указанного луча нас не будут интересовать, т.к. в силу теоремы 1.2 задачу (1)–(5) достаточно рассмотреть, например, только в верхней полуплоскости параметра $\lambda = \gamma^2$.

Для фундаментального решения имеем разложение [145]

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\tilde{k}_1 r) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + P(r), \\ P(r) &= \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + c_1 + c_2 r^2 + o(r^3), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (17)$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} r \ln r + O(r), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{4\pi} \ln r + O(1).$$

Легко проверить, что первые производные функции $P(r)$ по x , y , x_0 или y_0 непрерывны, а вторые имеют логарифмическую особенность при $r \rightarrow 0$. Теперь, подставляя (16) и (17) в формулы (15), получим следующий результат.

Лемма 1. Для функций Грина G_j^Π , G_j^Ψ справедливы представления

$$\begin{cases} G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r^*} + K_j^\Pi(x, y, x_0, y_0), \\ G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r^*} + K_j^\Psi(x, y, x_0, y_0), \end{cases} \quad (18)$$

$r^* = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, в которых функции K_j^Π , K_j^Ψ непрерывно дифференцируемы на множестве $(\Omega_j \cup X) \times (\Omega_j \cup X)$, а их вторые производные (по любым переменным) имеют на этом множестве самое большее – логарифмическую особенность.

Напомним, что множество X – есть совокупность конечного числа открытых интервалов, лежащих на оси $y = 0$, поэтому точки этого множества являются внутренними точками областей $\Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Из леммы 1 следует, что функция $G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0)$ имеет логарифмическую особенность $-\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$, поэтому возможность предельного перехода под знаком интеграла при вычислении $\Psi_j(x, 0)$ при выводе уравнения (12) очевидна:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \Psi_j(x, y) = (-1)^j \int_{\omega} G_j^\Psi(x, y, x_0, 0) \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} \Psi_j(x_0, y_0) dx_0.$$

Рассмотрим случай уравнения (13). Пусть $y > 0$. Тогда все подынтегральные функции гладкие и можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \int_c^{x_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r^*} \right) dx_0 = \frac{\partial}{\partial y} \int_c^{x_0} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - x_0)^2} dx_0 = \\ & = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y} - \operatorname{arctg} \frac{c - x}{y} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{x - x_0}{y^2 + (x - x_0)^2} - \frac{1}{\pi} \frac{c - x}{y^2 + (c - x)^2}, \end{aligned}$$

причем последнее слагаемое отсутствует, если $x = c$. Далее рассмотрим плоскость (x, y) как плоскость комплексного переменного. Обозначим $z = (x, y)$, $t = (x_0, 0)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} \varphi(x_0) dx_0 = \\ & = \int_{\omega} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} \varphi_1(x_0) dx_0 + i \int_{\omega} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} \varphi_2(x_0) dx_0, \end{aligned}$$

где $\varphi(x_0) = \varphi_1(x_0) + i\varphi_2(x_0)$, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда подынтегральные функции вещественны. Пусть $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}$; $\varphi(t)$ – вещественная функция, $\varphi \in H^*$.

Тогда по формулам Сохоцкого-Племеля [141, с. 66]

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\omega} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} \varphi(x_0) dx_0 &= - \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{\omega} \frac{\varphi(t) dt}{t - z} = \\ &= \operatorname{Re} \lim_{y \rightarrow 0} (2\pi i \Phi(z)) = - \operatorname{Re} \left(2\pi i \left(\frac{1}{2} \varphi(x) + \Phi(x) \right) \right) = \\ &= -2\pi i \Phi(x) = \int_{\omega} \frac{\varphi(x_0) dx_0}{x - x_0}, \end{aligned}$$

и возможность предельного перехода под знаком интеграла установлена.

Функции $\frac{\partial}{\partial x} G_j^\Psi(x, y, x_0, 0)$ имеют особенность $\frac{x_0 - x}{(x - x_0)^2 + y^2}$,

поэтому для них также справедлив предельный переход под знаком интеграла; функции $\theta_j(x, x_0)$ особенности не имеют.

Из полученных результатов следует, что уравнения (12), (13) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} \left(\frac{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2}{\pi} \ln |x - x_0| + K_{11}(x, x_0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ &+ \int_{\omega} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi} \ln |x - x_0| + K_{12}(x, x_0) \right) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega; \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{x - x_0} + \hat{K}_{21}(x, x_0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ &+ \int_{\omega} \hat{K}_{22}(x, x_0) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega. \quad (20) \end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения конкретный вид функций $K_{ij}(x, x_0)$ значения не имеет. Важно лишь знать гладкость этих функций. Из формул (15)–(17) легко видеть, что основное слагаемое в этих представлениях, «отвечающее» за гладкость функций K_{ij} , есть $\frac{1}{8\pi} r^2 \ln r$. Анализ этого слагаемого показывает, что ядра

$K_{1j}(x, x_0)$ непрерывно дифференцируемы в $\omega \times \omega$, а их вторые производные (по любым переменным) имеют логарифмическую особенность; ядра $\hat{K}_{2j}(x, x_0)$ непрерывны в $\omega \times \omega$, их первые производные имеют логарифмическую особенность при $|x - x_0| \rightarrow 0$.

До сих пор рассматривались точки множества X и $\omega \subset X$, лежащие на оси $y = 0$. По определению точки этих множеств не могут находиться на $\partial\Omega^{(j)}$. Для получения системы интегральных уравнений (12), (13) такого рассмотрения достаточно, т.к. выполнение условий сопряжения (3) требуется лишь во внутренних точках ω . Однако при решении системы (19), (20) важно знать поведение функций K_{1j} , $\hat{K}_{2j}(x, x_0)$ в окрестности концевых точек $\partial\omega$. Если $\bar{\omega} \subset X$ (т.е. концы $\partial\omega$ не лежат на границе области Q), то для этих функций все перечисленные выше условия будут выполняться в $\omega \times \omega$. Если некоторые концы $\partial\omega$ принадлежат ∂Q , то функции $N_j^{\Pi, \Psi}(x, x_0)$ из (16) могут иметь дополнительную «неподвижную» особенность (см. разд. 3 этой главы, а также [101]). Мы ограничимся случаем $\bar{\omega} \subset X$, достаточным для наших целей.

Теперь докажем следующий результат.

Лемма 2. Пусть $\chi, \varphi \in H^*$ – некоторые фиксированные функции. Интегральное соотношение (20) вместе с условиями (14) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\frac{2}{\pi} \ln|x - x_0| + K_{21}(x, x_0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ & + \int_{\omega} K_{22}(x, x_0) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega; \end{aligned} \quad (21)$$

где $K_{2j}(x, x_0) = R_j(x, x_0) - f_j(x, x_0)$, $R_j(x, x_0) = \int_c^x \hat{K}_{2j}(x, x_0) dx$ – непрерывообразные $\hat{K}_{2j}(x, x_0)$ по переменной x ,

$$f_j(x, x_0) = \sum_{v=1}^N f_v^{(j)}(x_0) \eta_v(x), \quad \eta_v(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_v, \\ 0, & x \notin \omega_v, \end{cases}$$

$$f_v^{(1)}(x_0) = \int_{\omega_v} \left(\frac{2}{\pi} \ln|x - x_0| + R_1(x, x_0) \right) \rho_v(x) dx;$$

$$f_v^{(2)}(x_0) = \int_{\omega_v} R_2(x, x_0) \rho_v(x) dx - \eta_v(x_0),$$

$$\rho_v(x) = \frac{1}{\pi |a_{2v} - x|^{\frac{1}{2}} |a_{2v-1} - x|^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказательство. Пусть выполнено соотношение (20) и условия (14). Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{\omega} \left(\frac{2}{\pi} \ln|x - x_0| + K_{21}(x, x_0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ + \int_{\omega} K_{22}(x, x_0) \varphi(x_0) dx_0, \quad x \in \omega. \quad (23)$$

Дифференцируя (23) под знаком интеграла, в силу (20) получим $F'(x) = 0$, $x \in \omega$, следовательно, $F(x) = C_v$, $x \in \omega_v$. По теореме Фубини о повторных интегралах [109]

$$C_v = \int_{\omega_v} F(x) \rho_v(x) dx = \int_{\omega} \chi(x_0) dx_0 \int_{\omega_v} \left(\frac{2}{\pi} \ln|x - x_0| + K_{21}(x, x_0) \rho_v(x) \right) dx + \\ + \int_{\omega} \varphi(x_0) dx_0 \int_{\omega_v} K_{22}(x, x_0) \rho_v(x) dx = \int_{\omega_v} \varphi(x_0) dx_0 = 0$$

из условий (14). Значит, $F(x) \equiv 0$, $x \in \omega$.

Докажем обратное утверждение. Пусть (21) верно для всех точек $x \in \omega$. Дифференцируя (21) под знаком интеграла, получим, что выполнено (20). Но по доказанному выше всегда $\int_{\omega_v} F(x) \rho_v(x) dx = \int_{\omega_v} \varphi(x_0) dx_0$, поэтому (14) также выполнено. Лемма

доказана. #

Лемма 2 означает, что система интегральных уравнений (12), (13) с дополнительными условиями (14) может быть заменена эквивалентной системой интегральных уравнений, в которой ядра имеют логарифмические особенности:

$$\int_{\omega} \left(\frac{1}{\pi} (\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2) \ln|x - x_0| + K_{11}(x, x_0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ + \int_{\omega} \left(\frac{1}{\pi} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ln|x - x_0| + K_{12}(x, x_0) \right) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega; \quad (24)$$

$$\int_{\omega} \left(\frac{2}{\pi} \ln|x - x_0| + K_{21}(x, x_0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ + \int_{\omega} K_{22}(x, x_0) \varphi(x_0) dx_0 = 0, \quad x \in \omega.$$

Гладкость функции $K_{1j}(x, x_0)$ рассматривалась выше. Покажем, что функции $K_{2j}(x, x_0)$ имеют ту же гладкость. Для этого достаточно проследить преобразования по формулам (22) «основного» слагаемого $(x - x_0)\ln|x - x_0|$, которое дает особенность в производных. После несложных вычислений будем иметь

$$K_{21}(x, x_0) = c(x - x_0)^2 \ln|x - x_0| + c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (25)$$

и аналогичное разложение для $K_{22}(x, x_0)$ (при выводе (25) использовалась формула $\int_{\omega_v} \ln|x - x_0| \rho_v(x) dx = \pi \ln \frac{a_{2v} - a_{2v-1}}{4}$, $x_0 \in \omega_v$).

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть $\bar{\omega} \subset X$. Тогда систему интегральных уравнений (12), (13) с дополнительными условиями (14) можно свести к эквивалентной системе (24), в которой функции $K_{ij}(x, x_0) \in C^1(\bar{\omega} \times \bar{\omega})$, а их вторые производные (по любым переменным) имеют логарифмическую особенность $O(\ln|x - x_0|)$ при $|x - x_0| \rightarrow 0$; $x \in \bar{\omega}$, $x_0 \in \bar{\omega}$.

Таким образом, нам удалось с помощью представлений (16), (17) выделить логарифмическую особенность системы (24) и, что особенно важно, описать свойства регулярной части этой системы.

§3 Эквивалентность краевой задачи и системы интегральных уравнений

Докажем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0)$, $G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0)$ функции Грина первой и второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца (1) с коэффициентом $\tilde{k}_j^2 = \varepsilon_j - \gamma^2$ в области Ω_j ($j = 1, 2$), $\gamma \neq 0$, $\bar{\omega} \subset X$. Тогда если существует нетривиальное решение краевой задачи (1)–(5), то существует нетривиальное решение системы интегральных уравнений (12)–(14). Обратно, из существования нетривиального решения задачи (12)–(14) следует существование нетривиального решения задачи (1)–(5).

Замечание. В условиях теоремы 2 предполагается, что функции Грина G_j^Π , G_j^Ψ существуют при данном значении $\lambda = \gamma^2$. Однако эти функции будут иметь счетное множество полюсов

$\Lambda = \bigcup_{j=1}^2 \Lambda_j^\Pi \cup \Lambda_j^\Psi \subset C$, если их рассматривать как функции параметра λ . При $\lambda \in \Lambda$ функции Грина не определены. Поэтому теорему 2 можно назвать теоремой о спектральной эквивалентности задачи (1)–(5) и системы интегральных уравнений (12)–(14) на множестве $C \setminus \Lambda$.

Доказательство. В разделе 1 было показано, что система (12)–(14) есть следствие задачи (1)–(5), т.е. если пара Π, ψ – нетривиальное решение системы (1)–(5), то пара φ, χ – также нетривиальное решение (12)–(14). Докажем обратное утверждение.

Пусть φ, χ – нетривиальное решение (12)–(14). Образуем функции

$$\Pi(x_0) \equiv \sum_{v=1}^N \eta_v(x_0) \int_{a_{2v-1}}^{x_0} \varphi(t) dt, \quad x_0 \in \bar{\omega}; \quad (26)$$

$$\Pi_j(x, y) \equiv (-1)^{j+1} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0) \Pi(x_0) dx_0, \quad (x, y) \in \Omega_j; \quad (27)$$

$$\gamma \Psi_j(x, y) = (-1)^j \int_{\omega} G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0) (\tilde{k}_j^2 \chi(x_0) + \varepsilon_j \varphi(x_0)) dx_0, \quad (x, y) \in \Omega_j. \quad (28)$$

За счет выбора функций Грина G_j^Π, G_j^Ψ функции $\Pi_j(x, y), \Psi_j(x, y)$ будут удовлетворять уравнениям Гельмгольца (1) внутри областей Ω_j и условиям (2) на границе Γ_0 . Для доказательства этого факта достаточно провести необходимые действия под знаком интеграла в (26)–(28) (в этом случае точки (x, y) и $(x_0, 0)$ не совпадают). Далее, по формулам (18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_j^\Pi &= \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} K_j^\Pi(x, y, x_0, y_0); \\ \frac{\partial}{\partial y_0} G_j^\Psi(x, y, x_0, 0) &= -\frac{1}{\pi} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} K_j^\Psi(x, y, x_0, 0). \end{aligned}$$

В плоскости комплексного переменного $z = x + iy, z = (x, y)$, $t = (x_0, 0)$ по формулам Сохоцкого-Племеля будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} &= \operatorname{Im} \frac{1}{t - z}; \\ \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\omega} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} \varphi(x_0) dx_0 &= \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{\omega} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \end{aligned}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Im}(2\pi i \Phi(z)) = \operatorname{Im} 2\pi i \left(\frac{\varphi(x)}{2} + \Phi(x) \right) = \pi \varphi(x)$$

для вещественных функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера H^* (как и выше, достаточно рассмотреть случай вещественных функций $\varphi(t)$), $x \in \omega$; здесь $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}$. Используя граничные условия для функций Грина G_j^Π , G_j^Ψ и переходя к пределу в (27), (28), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \Pi_j(x, y) &\equiv \Pi_j(x, 0) = \Pi(x), \quad x \in \omega; \\ \gamma \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \Psi_j(x, y)}{\partial y} &\equiv \gamma \left. \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right|_{\omega} = \tilde{k}_j^2 \chi(x) + \varepsilon_j \varphi(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) следует, что $[\Pi]_{\omega} = 0$,

$$\gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{\omega} = \left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right]_{\omega} = \gamma^2 \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right]_{\omega}.$$

Условие $[\Psi]_{\omega} = 0$ удовлетворяется в силу интегрального уравнения (12), а условие

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right]_{\omega} + \gamma \left[\frac{1}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{\omega} = 0$$

в силу уравнения (13). Действительно, в первом случае достаточно перейти к пределу под знаком интеграла в (28); во втором – учитывая условия $\Pi(a_v) = 0$, $v = 1, \dots, 2N$, следующие из (26), проинтегрировать по частям (27):

$$\Pi_j(x, y) = (-1)^j \int_{\omega} \tilde{G}_j^\Pi(x, y, x_0, 0) \varphi(x_0) dx_0, \quad (x, y) \in \Omega_j,$$

$$\tilde{G}_j^\Pi(x, y, x_0, 0) = \int_c^{x_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0) dy_0, \quad (30)$$

и записать рассматриваемое условие сопряжения с помощью (28), (30). Это тот же путь, который привел нас к уравнениям (12), (13). Обоснование всех предельных переходов дано в §2.

Остается установить справедливость оценок (4). Пусть a – угловая точка или ребро; $a \in \Gamma_0$. Если $a \notin \partial\omega$, то оценки (4) получа-

ются из результатов о гладкости решений однородных эллиптических уравнений с однородными граничными условиями в окрестности угловой точки [111] (в [111] доказаны более сильные оценки, а также приведены разложения решения в окрестности точки a). Рассмотрим случай острого ребра $a \in \partial\omega$. В этом случае для главных частей производных $\frac{\partial\Psi_j}{\partial x}, \frac{\partial\Psi_j}{\partial y}, \frac{\partial\Pi_j}{\partial x}, \frac{\partial\Pi_j}{\partial y}$ справедливо представление

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} \hat{\Phi}(x_0) dx_0 = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega} \frac{\hat{\Phi}(t) dt}{t - z},$$

или

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} \hat{\Phi}(x_0) dx_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{\omega} \frac{\hat{\Phi}(t) dt}{t - z},$$

где $z = x + iy$, $z = (x, y)$, $t = (x_0, 0)$, причем функция $\hat{\Phi}(t) \in H^*$ представима в виде

$$\hat{\Phi}(t) = \frac{\varphi^*(t)}{|a - t|^\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad \varphi^* \in H_\mu,$$

в окрестности точки a . Эти представления позволяют воспользоваться результатами о поведении интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования. Согласно [141] для

$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\hat{\Phi}(t) dt}{t - z}$ верна оценка

$$|\Phi(z)| \leq \frac{1}{2 \sin \alpha \pi} \frac{|\varphi^*(a)|}{|z - a|^\alpha} + \frac{c}{|z - a|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 < \alpha, \quad (31)$$

причем точка z может находиться и на линии интегрирования ω . Из (31) непосредственно следуют оценки (4) для $|\nabla\Pi|$, $|\nabla\Psi|$.

Для функций $\Pi_j(x, y)$ главная часть имеет вид $\frac{1}{\pi} \int_{\omega} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} \Pi(x_0) dx_0$, поэтому, как и выше, достаточно рассмотреть интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Pi(t) dt}{t - z}; \quad z = (x, y), \quad t = (x_0, 0).$$

Функция $\Pi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\bar{\omega}$. Действительно, пусть $t_1, t_2 \in \bar{\omega}_v$. По формулам (26) будем иметь

$$\begin{aligned} |\Pi(t_2) - \Pi(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt \right| \leq C_1 \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(a_{2v} - t)^\alpha (t - a_{2v-1})^\alpha} \right| \leq \\ &\leq C_2 |t_1 - t_2|^{1-\alpha} = C_2 |t_1 - t_2|^\beta, \quad \beta = 1 - \alpha > 0. \end{aligned}$$

Далее дополним $\bar{\omega}$ до гладкого замкнутого контура S и положим

$$\tilde{\Pi}(t) = \begin{cases} \Pi(t), & t \in \omega; \\ 0, & t \notin \omega, t \in S. \end{cases}$$

Так определенная функция $\Pi(t)$, очевидно, также удовлетворяет условию Гельдера H_β на S . Тогда по теореме о поведении интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования [141, с. 85]

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\tilde{\Pi}(t) dt}{t - z_2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\tilde{\Pi}(t) dt}{t - z_1} \right| \leq C |z_2 - z_1|^\beta$$

для любых z_1, z_2 , лежащих внутри или на контуре S , причем под $\Phi(z)$ при $z \in S$ понимается соответствующее граничное значение. Выбирая в качестве z_1 точку a , $z_2 = z$, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} \Pi(x_0) dx_0 \right| &= |\text{Im} 2\pi i (\Phi(z) - \Phi(a))| \leq \\ &\leq 2\pi |\Phi(z) - \Phi(a)| \leq 2\pi c |z - a|^\beta = 2\pi c \rho^\beta, \end{aligned}$$

из которой следует, что $|\Pi| < \text{const } \rho^\beta$, $0 < \beta \leq 1$, в окрестности ребра a . Ограничность $|\psi|$ в окрестности ребра a очевидна. Теорема доказана.

Доказанная теорема в сочетании с теоремой 1 позволяет утверждать, что краевая задача (1)–(5) эквивалентна системе интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах (24). Такие системы будут рассмотрены в следующем разделе.

Раздел 2. Метод вычисления характеристических чисел и собственных векторов L -оператор-функций

В разделе 1 задача о нормальных волнах была сведена к нелинейной задаче на собственные значения для системы интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах. В настоящем разделе предлагается и обосновывается численный метод определения характеристических чисел и собственных векторов задачи. Такие методы представляют и самостоятельный интерес, поэтому изложение ведется в общем виде, а потом рассматривается конкретная задача о нормальных волнах волноведущей структуры.

В разделе предлагается и обосновывается численный метод нахождения характеристических чисел и собственных векторов нелинейной задачи на собственные значения для системы интегральных оператор-функций с логарифмической особенностью в ядрах. В пространствах, естественно связанных с численным методом, изучается специальный класс таких систем, названных L -оператор-функциями. Такие оператор-функции характеризуются возможностью выделения главной обратимой части системы; компактная часть допускает равномерную аппроксимацию операторами конечного ранга. Проекционный метод основан на разложении решений по собственным функциям главной части оператора системы. Приближенные характеристические числа и собственные векторы находятся как решения уже конечномерной алгебраической задачи, которая приводит к трансцендентному уравнению относительно спектрального параметра. На основе теории дискретной сходимости [61, 62] доказываются теоремы о сходимости приближенных характеристических чисел и собственных векторов к точным для систем, голоморфно зависящих от спектрального параметра. В конце главы результаты обобщаются на случай конечномероморфных фредгольмовых оператор-функций.

Результаты раздела опубликованы в работах [3, 40, 98].

§1 Классы Φ_p . Логарифмические интегральные операторы в классах Φ_p

Здесь будут изучены свойства логарифмических интегральных операторов в некоторых специальных классах Φ_p , естественно связанных с рассматриваемым в этой главе численным методом.

Пусть h_p – пространство последовательностей комплексных чисел ξ_k таких, что

$$\frac{|\xi_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 k^p < \infty; p \geq 0. \quad (1)$$

Пространства h_p , наделенные скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_p = \frac{\xi_0 \bar{\eta}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k k^p, \quad (2)$$

превращаются в (сепарабельные) гильбертовы пространства.

Рассмотрим классы функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$:

$$\Phi_p = \left\{ \varphi : \varphi(t) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k T_k(t), \xi \in h_p \right\}, \quad (3)$$

$T_n(t) = \cos(n \arccost)$ – многочлены Чебышева первого рода. Эти пространства также становятся гильбертовыми, если определить скалярные произведения по формуле

$$(\varphi, \psi)_p = (\xi, \eta)_p = \frac{\xi_0 \bar{\eta}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k k^p,$$

$$\varphi(t) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k T_k(t), \quad \psi(t) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k T_k(t). \quad (4)$$

Ясно, что Φ_p изоморфно h_p .

Хорошо известно, что [109]

$$\Phi_0 = L_2 \left([-1, 1] ; (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Утверждение 1.

$$\Phi_2 = \tilde{W}_2^1 \equiv \left\{ \varphi : \varphi' \in L_2 \left([-1, 1] ; (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi_2$. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k T_k(t), \quad \xi_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_k(t) \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

и последовательность ξ_k такова, что $\frac{|\xi_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 k^2 < \infty$. Следовательно, по теореме Рисса-Фишера [109] существует такой элемент

$f \in L_2\left([-1, 1], (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$, что его коэффициенты Фурье по ортогональной системе функций Чебышева второго рода $U_n(x) = \sin(n \arccos x)$, $n \geq 1$, равны $n\xi_n$, $n\xi_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Поскольку $|f(x)|$ интегрируема с весом $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, функция $F(x) = \int_{-1}^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}$, представляющая собой неопределенный интеграл от суммируемой функции, абсолютно непрерывна, и ее производная $F'(x) = f(x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ почти всюду непрерывна [109]. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) F'(x) dx = \\ & = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U'_n(x) F(x) dx = n \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_n(x) F(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (\varphi(t) - F(t)) T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad k \geq 1, \\ & \varphi(t) - F(t) = \text{const}, \quad F'(t) = \varphi'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\varphi' \in L_2\left([-1, 1]; (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Обратно, пусть $\varphi \in \tilde{W}_2^1$. Ее ряд Фурье-Чебышева

$$\varphi(t) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k T_k(t), \quad \xi_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) T_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad k \geq 0.$$

Разложение по системе функций $U_n(x)$, образующих базис в $L_2\left([-1, 1]; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$, дает

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) \varphi'(x) dx = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U'_n(x) \varphi(x) dx = \\ &= n \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_n(x) \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = n\xi_n. \end{aligned}$$

Теперь, применяя неравенство Бесселя [109] к η_k , получим, что $\xi \in h_2$. Утверждение доказано. #

Приведем еще одну характеристику пространства Φ_2 .

Утверждение 2. *Функции из Φ_2 удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ , $\mu \leq \frac{1}{4}$.*

Доказательство. Докажем, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^{\frac{1}{4}}, \quad -1 \leq x, y \leq 1, \quad \forall \varphi \in \Phi_2.$$

Отсюда будет следовать справедливость условия Гельдера при всех $0 < \mu \leq \frac{1}{4}$. Прежде всего заметим, что $|T_n(x)| \leq 1$,

$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n T_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \leq \left(\frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 n^2 \right)^{1/2} < \infty$, и ряд из непрерывных функций $T_n(x)$ сходится равномерно, поэтому $\varphi \in C[-1, 1]$. Далее,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (T_n(x) - T_n(y)) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (\cos n\theta - \cos nt) \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \left| \sin \frac{n(\theta - t)}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \|\xi\|_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \frac{\theta - t}{2}}{n^2} \right)^{1/2} = \\ &= 2 \|\xi\|_2 \left(|\theta - t| \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} |\theta - t| \right) \right)^{1/2} \leq \sqrt{\pi} \|\xi\|_2 |\theta - t|^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \|\xi\|_2 |\cos \theta - \cos t|^{1/4} = C|x - y|^{1/4}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. #

Будем рассматривать логарифмический оператор, определяемый формулой

$$L\varphi \equiv \int_{-1}^1 \ln|x - s| \varphi(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1 - s^2}}, \quad \varphi \in \Phi_p. \quad (5)$$

Свойства этого оператора в классах Φ_p определяются следующей леммой.

Лемма 1. Полиномы Чебышева $T_n(t)$ являются собственными функциями оператора L и справедливы следующие выражения:

$$-\int_{-1}^1 \ln|x-s| T_n(s) \frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{n} T_n(x), \quad n \geq 1; \quad -\int_{-1}^1 \ln|x-s| \frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}} = \ln 2.$$

Доказательство имеется в [97] и мы не будем здесь его повторять.

Из леммы 1 сразу следует

Теорема 1. Оператор $L : \Phi_p \rightarrow \Phi_{p+2}$, $p \geq 0$, непрерывно обратим.

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1 для

$$\varphi \in \Phi_p, \quad \varphi(t) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k T_k(t), \quad L\varphi = \psi,$$

имеем

$$\psi(t) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k T_k(t), \quad \eta_0 = \xi_0 \ln 2, \quad \eta_k = \frac{1}{k} \xi_k, \quad (6)$$

откуда непосредственно получаем утверждение теоремы. #

Замечание. Формулы, приведенные выше, по существу, задают обратный оператор:

$$L^{-1} : \Phi_{p+2} \rightarrow \Phi_p, \quad L^{-1}\psi = \varphi.$$

§2 Компактные операторы в пространствах Φ_p

Пусть оператор K задан формулой

$$K\varphi \equiv \int_{-1}^1 K(x, s) \varphi(s) \frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}}. \quad (6)$$

Рассмотрим следующий вопрос: при каких условиях, налагаемых на ядро $K(x, s)$, этот оператор, действующий из $\Phi_{p'}$ в Φ_{p+2} , будет компактным? Ниже рассматривается случай четных $p \geq 0$.

Теорема 2. Пусть p – четно, $0 \leq p' \leq p$, и выполнены условия

$$K(x, s) \in C^{p/2}([-1, 1] \times [-1, 1]),$$

$$D^{\frac{p}{2}+1} K(x, s) \in L_2 \left([-1, 1] \times [-1, 1]; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (7)$$

где через D^α обозначена производная степени α , $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$,

$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Тогда формула (6) определяет компактный оператор $K : \Phi_{p'} \rightarrow \Phi_{p+2}$.

Доказательство. Фиксируем p' , $0 \leq p' \leq p$. Обозначим через P_N и Q_N проекторы, действующие по формулам:

$$\begin{aligned} P_N \varphi &= \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^N \xi_k T_k(t), \quad P_N : \Phi_{p'} \rightarrow \Phi_{p'}, \\ Q_N \varphi &= \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^N \eta_k T_k(t), \quad Q_N : \Phi_{p+2} \rightarrow \Phi_{p+2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где φ и ψ те же, что и в (4), и рассмотрим конечномерные операторы $K_N = Q_N K P_N$, $N = 1, 2, \dots$. Если $K\varphi = \psi$, то

$$\begin{aligned} \eta_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0k}} a_{nk} \xi_k, \quad n \geq 0, \\ a_{nk} &= 2 \int_{-1}^1 \int_0^1 K(x, s) T_n(x) T_k(x) \frac{dx ds}{\pi^2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, для K_N имеем

$$K_N \varphi = \psi, \quad \eta_k = \sum_{n=0}^N a_{nk} \xi_k, \quad n \leq N; \quad \eta_k = 0, \quad n > N. \quad (10)$$

Предположим, что для коэффициентов a_{nk} выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+2} |a_{nk}|^2 \leq C^2 < \infty. \quad (11)$$

Тогда по неравенству Коши-Буняковского получим

$$\begin{aligned} \|K\varphi\|_{p+2}^2 &= \frac{|\eta_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 n^{p+2} \leq \\ &\leq \|\xi\|_0^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 n^{p+2} \right) \leq \\ &\leq \|\xi\|_{p'}^2 C^2 = \|\varphi\|_{p'}^2 C^2, \end{aligned}$$

следовательно, $K : \Phi_{p'} \rightarrow \Phi_{p+2}$ и $\|K\| \leq C$. Далее,

$$\begin{aligned} \|(K - K_N)\varphi\|_{p+2}^2 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{0k} \xi_k \right|^2 + \sum_{n=1}^N n^{p+2} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk} \xi_k \right|^2 + \\ &+ \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{p+2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0k}} a_{nk} \xi_k \right|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \|\varphi\|_0^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{0k}|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+2} |a_{nk}|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} n^{p+2} |a_{nk}|^2 \right) \rightarrow 0$$

в силу (11), поэтому K есть предел по норме последовательности конечномерных операторов $\|K - K_N\| \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, и компактность доказана. Таким образом, достаточно установить справедливость (11).

Рассмотрим функции

$$f_0(x, s) = K(x, s), \quad f_q(x, s) = \sqrt{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x} f_{q-1}(x, s), \quad 0 \leq q \leq \frac{p}{2} + 1.$$

По условию все функции принадлежат пространству

$$L_2 \left([-1, 1] \times [-1, 1] ; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \right),$$

а функции f_q , $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$, непрерывны. Разложим функции f_q по базисам $\{T_n(x)T_k(s)\}$ и $\{U_n(x)T_k(s)\}$ в пространстве

$$L_2 \left([-1, 1] \times [-1, 1] ; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \right);$$

$$f_q(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0n}} \frac{1}{1+\delta_{0k}} b_{nk}^{(q)} T_n(x) T_k(s),$$

$$b_{nk}^{(q)} = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_q(x, s) T_n(x) T_k(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{T_k(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} f_{q-1}(x, s) T_n(x) dx =$$

$$= -\frac{4n}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{q-1}(x, s) U_n(x) T_k(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} = -nc_{nk}^{(q-1)}, \quad q \geq 2; \quad (12)$$

$$f_q(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0k}} c_{nk}^{(q)} U_n(x) T_k(s),$$

$$c_{nk}^{(q)} = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_q(x, s) U_n(x) T_k(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} =$$

$$= \frac{4n}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{q-1}(x, s) T_n(x) T_k(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} = nb_{nk}^{(q-1)}, \quad q \geq 1. \quad (13)$$

Отсюда следует, что при $n \geq 1$

$$|a_{nk}| = \frac{1}{2} |b_{nk}^{(0)}| = \begin{cases} \frac{1}{2} n^{-\frac{p}{2}-1} b_{nk}^{(p/2+1)}, & \frac{p}{2} - \text{нечетно}, \\ \frac{1}{2} n^{-\frac{p}{2}-1} c_{nk}^{(p/2+1)}, & \frac{p}{2} - \text{четно}. \end{cases}$$

Но в силу неравенства Бесселя [109]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}^{(p/2+1)}|^2 \leq \frac{8}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| f_{\frac{p}{2}+1}(x, s) \right|^2 \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}^{(p/2+1)}|^2 \leq \frac{8}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| f_{\frac{p}{2}+1}(x, s) \right|^2 \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}},$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} n^{p+2} |a_{nk}|^2 \leq \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| f_{\frac{p}{2}+1}(x, s) \right|^2 \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}}. \quad (14)$$

При $n = 0$ также из неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 \leq 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x, s) \left| \frac{dx}{\pi \sqrt{1-x^2}} \right|^2 \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}} \leq 4 \max_{-1 \leq x, s \leq 1} |K(x, s)|^2. \quad (15)$$

Оценки (14), (15) доказывают неравенство (11), а вместе с ним и теорему 2. #

Попутно мы получили следующий результат.

Утверждение 3. Если выполнены условия теоремы 2, а операторы $K_N = Q_N K P_N$ определены соотношениями (8), то $\|K - K_N\| \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ и верны оценки

$$\|K_N\|^2 \leq \|K\|^2 \leq \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| f_{\frac{p}{2}+1}(x, s) \right|^2 \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} + 4 \max_{-1 \leq x, s \leq 1} |K(x, s)|^2 = C^2,$$

причем, C^2 не зависит от p' , $0 \leq p' \leq p$.

Оператор K будет компактным и при менее сильных ограничениях на ядро $K(x, s)$, но мы не стремились получить точный результат. Нам было важно аппроксимировать оператор K конечно-мерными операторами K_N и получить оценки (16), которые будут играть важную роль при доказательстве теорем сходимости.

§3 Метод вычисления характеристических чисел и собственных векторов L -оператор-функций. Теорема сходимости

Дадим следующее определение.

Определение 1. Оператор-функцию $A(\lambda) : \Phi_p \rightarrow \Phi_{p+2}$, заданную в некоторой области G комплексной плоскости ($\lambda \in G \subset C$), будем называть L -оператор-функцией, если она представима в виде

$$A(\lambda)\varphi = K(\lambda)\varphi + L\varphi \equiv \\ \equiv \int_{-1}^1 K(x, s; \lambda)\varphi(s) \frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}} - \int_{-1}^1 \ln|x-s| \varphi(s) \frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}}, \quad (17)$$

где $K(\lambda)$ – компактный оператор при любом $\lambda \in G$.

Обозначим через $\rho(A)$ множество точек области G , в которых о.-ф. $A(\lambda)$ непрерывно обратима, а через $\sigma(A)$ – множество точек $G \setminus \rho(A)$. Это, соответственно, резольвентное множество и спектр о.-ф. $A(\lambda)$ в области G . Напомним, что $A(\lambda)$ – линейный ограниченный оператор при всяком фиксированном $\lambda \in G$.

Теорема 3. Пусть L -оператор-функция голоморфна в области G и $\rho(A) \neq \emptyset$. Тогда $A(\lambda)$ фредгольмова в G и спектр $\sigma(A)$ состоит из изолированного множества х.ч. конечной алгебраической кратности, предельные точки которого могут находиться лишь на границе области G .

Доказательство. Фредгольмовость $A(\lambda)$ следует из теоремы 1 и теоремы Рисса о сумме обратимого и компактного операторов [105]. Утверждения о спектре фредгольмовой голоморфной о.-ф. $A(\lambda)$ при $\rho(A) \neq \emptyset$ хорошо известны и имеются, например, в [78]. #

Итак, при выполнении условий теоремы 3 спектр L -оператор-функций состоит из изолированных х.ч. в G . Пусть $\lambda_0 \in G$ – х.ч. $A(\lambda)$, а φ_0 собственный вектор, отвечающий λ_0 , $A(\lambda_0)\varphi_0 = 0$. Рассмотрим о.-ф.

$$A_N(\lambda) = Q_N A(\lambda) P_N, \quad (18)$$

где операторы P_N и Q_N определены в (8). Естественно ожидать, что при достаточно больших N в окрестности х.ч. λ будет находиться х.ч. λ_N о.-ф. $A_N(\lambda)$:

$$A_N(\lambda_N)\varphi_N = 0, \varphi_N \neq 0, \quad (19)$$

а среди всех собственных векторов φ_N найдется подпоследовательность, сходящаяся к φ_0 . В этом случае приближенные х.ч. λ_N и собственные векторы φ_N уже можно находить, решая конечно-мерную алгебраическую задачу (20), (19)

$$\det(A_N(\lambda)) = 0, \quad (20)$$

где под $A_N(\lambda)$ в (20) понимается матрица коэффициентов. Ниже будет доказано, что при некоторых ограничениях такая схема решения задачи действительно может быть реализована.

Замечание. Проекционный метод Галеркина с выбором в качестве базисных функций полиномов Чебышева неоднократно применялся к решению интегральных уравнений и исследовался на сходимость. Но в данном случае мы имеем дело с нелинейной задачей на собственные значения в области G . Многие авторы ошибочно полагают, что доказательства в «стационарном» случае (когда операторы не зависят от λ или λ фиксирован) достаточно для обоснования метода. Однако без каких-либо предположений о зависимости $A(\lambda)$ от параметра λ сходимость $\lambda_N \rightarrow \lambda$ может не иметь места.

Для доказательства теоремы сходимости используем результаты работ [61, 62]. Определим конечномерные пространства

$$\Phi_p^N = P_N \Phi_p = \text{Im } P_N \subset \Phi_p; \quad \Phi_{p+2}^N = Q_N \Phi_{p+2} = \text{Im } Q_N \subset \Phi_{p+2};$$

нормы в Φ_p^N , Φ_{p+2}^N индуцированы нормами в Φ_p и Φ_{p+2} и обозначаются теми же символами $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{p+2}$. Здесь и далее не делается различий в обозначении элементов $\varphi_N \in \Phi_p^N$ и $\varphi_N = P_N \varphi \in \Phi_p$, а также в обозначении операторов $A_N = Q_N A P_N$

$$A_N : \Phi_p^N \rightarrow \Phi_{p+2}^N \quad \text{и} \quad A_N : \Phi_p \rightarrow \Phi_{p+2}.$$

Отметим, что $\|A_N\|_{\Phi_p^N \rightarrow \Phi_{p+2}^N} = \|A_N\|_{\Phi_p \rightarrow \Phi_{p+2}}$. Зависимость от λ , где она несущественна, будем опускать.

Определение 2 [61]. Последовательность операторов $\{A_n\}$, $n \in N$, $A_n : \Phi_p^n \rightarrow \Phi_{p+2}^n$ называется собственно сходящейся к оператору $A : \Phi_p \rightarrow \Phi_{p+2}$, если выполнены следующие два условия:

- 1) $x_n \in \Phi_p^n$, $x_n \rightarrow x$, $n \in N \Rightarrow A_n x_n \rightarrow Ax$, $n \in N$;
- 2) $\|x_n\| \leq \text{const}$, $n \in N$, $\{A_n x_n\}$ компактна, следовательно, $\{x_n\}$, $n \in N$, компактна (последовательность компактна, если всякая ее бесконечная подпоследовательность содержит другую сходящуюся подпоследовательность).

Замечание. В работах [61, 62] вводилось понятие P - и Q -сходимости, которые в данном случае совпадают с обычной сходимостью в пространствах Φ_p и Φ_{p+2} .

Обозначим через $\sigma(A_N)$ множество

$$G \setminus \left\{ \lambda \mid \lambda \in G, \exists A_N^{-1}(\lambda) : \Phi_{p+2}^N \rightarrow \Phi_p^N \right\}.$$

Теорема 4. Пусть p четно, $p \geq 0$; функция $K(x, s; \lambda)$ голоморфна в области G по переменной λ и выполнены условия (7) по переменным x, s . Тогда, если $\rho(A) \neq \emptyset$, то для x -ч. и собственных векторов о.-ф. $A(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$, определенных соотношениями (17), (18), справедливы следующие утверждения

- (i) $\lambda_0 \in \sigma(A) \Rightarrow \exists n_0, \{\lambda_n\} : \lambda_n \in \sigma(A_n), \lambda_n \rightarrow \lambda_0, n \geq n_0, n \in N$;
- (ii) $\lambda_n \in \sigma(A_n), \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in G, n \in N' \subset N \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma(A)$;
- (iii) $\|x_n\|_p \leq \text{const}, A_n(\lambda_n)x_n = 0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in G, \Rightarrow \{x_n\}, n \in N$

компактна;

- (iv) $\|x_n\|_p = 1, A_n(\lambda_n)x_n = 0, x_n \rightarrow x_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in G, n \in N' \subset N \Rightarrow \|x_0\|_p = 1, A(\lambda_0)x_0 = 0$.

Доказательство. Как следует из теорем 1, 2 в [61], для доказательства перечисленных утверждений достаточно установить, что

- 1) $A(\lambda), A_n(\lambda)$ голоморфны в G ;
- 2) $A(\lambda)$ фредгольмова в G ;
- 3) $\|A_n(\lambda)\|$ равномерно ограничены по n и λ на каждом компакте $K_0 \subset G$;
- 4) $A_n(\lambda) \rightarrow A(\lambda)$ собственно для любого $\lambda \in G$.

Рассмотрим коэффициенты

$$a_{nk} = a_{nk}(\lambda) = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x, s; \lambda) T_n(x) T_k(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}}.$$

Голоморфность $a_{nk}(\lambda)$ в G очевидна. Из оценки (16) следует, что $\|K_n(\lambda)\|, \|K(\lambda)\|$ ограничены в окрестности каждой точки $\lambda \in G$. Согласно [106, с. 459], из голоморфности $a_{nk}(\lambda)$ и ограниченности $\|K_n(\lambda)\|, \|K(\lambda)\|$ в окрестности каждой точки $\lambda \in G$ следует голоморфность о.-ф. $K_n(\lambda)$ и $K(\lambda)$ в G . Из той же оценки (16) получает-

ся равномерная ограниченность $\|A_n(\lambda)\|$ по n и λ на каждом компакте $K_0 \subset G$. Фредгольмовость $A(\lambda)$ установлена в теореме 3. Остается доказать собственную сходимость $A_n(\lambda) \rightarrow A(\lambda)$, $\lambda \in G$, $n \in N$.

Пусть $x_n \in \Phi_p^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A_n x_n - Ax\|_{p+2} &\leq \|A_n x_n - Q_n Ax\|_{p+2} + \|(I - Q_n) Ax\|_{p+2} \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|x_n - x\|_p + \|(I - Q_n) Ax\|_{p+2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Далее, пусть $\|x_n\| \leq c$, $n \in N$, $\{A_n x_n\}$ компактна. Тогда для любого $N' \subset N$ существует $N'' \subset N'$ и $y \in \Phi_{p+2}$ такие, что $A_n x_n \rightarrow y$, $n \in N''$, $A_n x_n = L_n x_n + K_n x_n \rightarrow y$; $L_n = Q_n L P_n$. Поскольку пространство Φ_p гильбертово, то из ограниченной последовательности $\{x_n\}$, $n \in N''$, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_n\}$, $n \in N''' \subset N''$, которую компактный оператор K переводит в сильно сходящуюся $\{Kx_n\}$, $n \in N'''$, $Kx_n \rightarrow u \in \Phi_{p+2}$. Но

$$K_n x_n = Kx_n + (K_n - K)x_n, (K_n - K)x_n \rightarrow 0$$

в силу Утверждения 3, поэтому

$$K_n x_n \rightarrow u, n \in N''' \Rightarrow L_n x_n \rightarrow v = y - u \Rightarrow x_n \rightarrow L^{-1}v, n \in N''',$$

так как

$$\|x_n - L^{-1}v\|_p \leq \|L^{-1}\| \cdot \|Lx_n - v\|_{p+2} \leq \|L^{-1}\| \cdot \|L_n x_n - v\|_{p+2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, n \in N'''.$$

Теорема доказана. #

Теорема 4 обосновывает метод вычисления х.ч. и собственных векторов, предложенный выше. В работе [61] имеются оценки скорости сходимости λ_n к λ_0 и x_n к ядру $\ker A(\lambda_0)$, однако они не являются конструктивными, поэтому мы не будем их приводить.

§4 Системы L -оператор-функций

До сих пор рассматривался случай одного уравнения (17). Но задача о нормальных волнах приводит к системе уравнений вида (17), причем ω состоит из нескольких интервалов. Ниже дается обобщение метода вычисления х.ч. и собственных векторов для систем L -оператор-функций.

Пусть $F_p = \underbrace{\Phi_p \times \dots \times \Phi_p}_{m \text{ раз}}$ – декартово произведение m экземпляров пространства Φ_p со скалярным произведением $\langle \Phi, \chi \rangle_p = \sum_{i=1}^m (\varphi_i, \chi_i)_p$, где $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in F_p$, $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_m) \in F_p$; $\varphi_i, \chi_i \in \Phi_p$. Определим проекторы

$$\hat{P}_N \Phi = (P_N \varphi_1, \dots, P_N \varphi_m), \quad \hat{Q}_N \Psi = (Q_N \psi_1, \dots, Q_N \psi_m), \quad \Psi \in F_{p+2}, \quad (21)$$

переводящие пространства F_p и F_{p+2} в конечномерные подпространства $F_p^N = \hat{P}_N F_p$ и $F_{p+2}^N = \hat{Q}_N F_{p+2}$ с индуцированным скалярным произведением и нормой.

Теперь рассмотрим систему L -оператор-функций, задаваемую операторной матрицей A_{ij} :

$$A(\lambda) = L(\lambda) + K(\lambda) : F_p \rightarrow F_{p+2}, \quad \lambda \in G,$$

$$(L\Phi)_i = \sum_{j=1}^m L_{ij} \varphi_j, \quad (K\Phi)_i = \sum_{j=1}^m K_{ij} \varphi_j, \quad i = 1, \dots, m; \\ L_{ij} \varphi \equiv -\alpha_{ij}(\lambda) \int_{-1}^1 \ln|x-s| \varphi(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}, \quad (22)$$

$\alpha_{ij}(\lambda)$ – комплексные функции переменного λ ;

$$K_{ij} \varphi \equiv \int_{-1}^1 K_{ij}(x, s; \lambda) \varphi(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}; \quad A_N(\lambda) = \hat{Q}_N A(\lambda) \hat{P}_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Для произвольного оператора $B : F_p \rightarrow F_{p+2}$ имеем

$$\|B\Phi\|_{p+2}^2 = \langle B\Phi, B\Phi \rangle_{p+2} = \\ = \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m B_{ij} \varphi_j \right\|_{p+2}^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \|B_{ij}\| \cdot \|\varphi_j\|_p \right)^2 \leq \|\vec{\Phi}\|_p^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|B_{ij}\|^2,$$

следовательно, для нормы оператора B верна оценка

$$\|B\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|B_{ij}\|^2. \quad (23)$$

Из формулы (23) следует, что если для каждой функции $K_{ij}(x, s; \lambda)$ выполнены условия (7), то

$$\|K - K_N\|^2 \rightarrow 0, K_N = \hat{Q}_N K \hat{P}_N, N \rightarrow \infty, \|K_N\|^2 \leq \|K\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij}^2, \quad (24)$$

где $c_{ij} = c_{ij}(\lambda)$ имеют тот же смысл, что и в (16).

Предположим, что $\det(\alpha_{ij}(\lambda)) \neq 0$, $\lambda \in G$. Тогда у матрицы $\alpha(\lambda) = (\alpha_{ij}(\lambda))$ существует обратная $\alpha^{-1}(\lambda)$, коэффициенты которой обозначим через $\alpha_{ij}^-(\lambda)$, оператор $L(\lambda)$ обратим, $L^{-1}(\lambda) = \alpha^{-1}(\lambda)L^{-1}$, справедлива оценка

$$\|L^{-1}(\lambda)\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |\alpha_{ij}^-(\lambda)|^2 \right) \|L^{-1}\|^2. \quad (25)$$

В этом случае о.-ф. $A(\lambda) = L(\lambda) + K(\lambda)$ будет фредгольмовой.

Если же $\det(\alpha_{ij}(\lambda_0)) = 0$, $\lambda_0 \in G$, то обратного оператора $L^{-1}(\lambda_0)$ не существует, $\dim \ker L(\lambda_0) = \infty$, оператор $A(\lambda_0)$ не может быть фредгольмовым, и, следовательно, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. При этом λ_0 может и не быть характеристическим числом, т.е. $\ker A(\lambda_0) = \emptyset$.

Определение 3. Точки $\lambda_0 \in G$, при которых $\det(\alpha_{ij}(\lambda_0)) = 0$, будем называть точками вырождения системы (22), а их совокупность обозначать через G_0 ; $G_0 \subset \sigma(A)$.

Теорема 5. Пусть p четно, $p \geq 0$, функции $\alpha_{ij}(\lambda)$, $K_{ij}(x, s; \lambda)$ голоморфны в области G (по переменной λ) и все функции $K_{ij}(x, s; \lambda)$ удовлетворяют условиям (7) по переменным x , s . Тогда, если $\rho(A) \neq \emptyset$, то $A(\lambda)$ фредгольмова в области $G \setminus G_0$, и спектр $\sigma(A)$ в этой области состоит из изолированного множества характеристических чисел конечной алгебраической кратности, предельные точки которого могут находиться лишь на границе области $G \setminus G_0$; для х.ч. и собственных векторов о.-ф. $A(\lambda)$, $A_N(\lambda)$ в области $G \setminus G_0$ справедливы все утверждения о сходимости (i)–(iv) из теоремы 4 (при этом предполагается, что о.-ф. $A(\lambda)$ и $A_N(\lambda)$ определены соотношениями (22), и рассмотрения ведутся в пространствах F_p). Кроме того, $G_0 \subset \sigma(A)$, и всякий компакт $K_0 \subset G$ содержит не более конечного числа точек вырождения.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение и утверждения о сходимости. Утверждения (i)–(iv) доказываются совершенно аналогично случаю одного уравнения; необходимо лишь учесть оценки (24), (25). Утверждение о том, что всякий компакт $K_0 \subset G$ содержит не более конечного числа точек вырождения, следует из теоремы единственности [130], согласно которой однозначная аналитическая функция $\det(\alpha_{ij}(\lambda))$ в области G , не равная тождественно нулю (иначе было бы $\rho(A) = \emptyset$), не может иметь последовательность нулей, сходящуюся к какой-либо конечной точке $\lambda_0 \in G$. Теорема доказана. #

§5 Метод вычисления характеристических чисел и собственных векторов в задаче о нормальных волнах волноведущей структуры

Рассмотрим систему (1.24), возникающую при исследовании задачи о нормальных волнах волноведущей структуры. Систему (1.24) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\omega_j} \left(\frac{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2}{\pi} \ln |x - x_0| + K_{11}(x, x_0) \right) \chi_j^*(x_0) p_j(x_0) dx_0 + \right. \\ & \quad \left. \int_{\omega_j} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi} \ln |x - x_0| + K_{12}(x, x_0) \right) \varphi_j^*(x_0) p_j(x_0) dx_0 \right\} = 0, \\ & \quad x \in \omega_i, \quad i = 1, \dots, N; \\ & \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\omega_j} \left(\frac{2}{\pi} \ln |x - x_0| + K_{21}(x, x_0) \right) \chi_j^*(x_0) p_j(x_0) dx_0 + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\omega_j} (K_{22}(x, x_0)) \varphi_j^*(x_0) p_j(x_0) dx_0 \right\} = 0, \quad x \in \omega_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (26) \end{aligned}$$

Здесь $p_v = \frac{1}{\sqrt{(a_{2v} - x_0)(x_0 - a_{2v-1})}}$, N – число интервалов ω_j ,

$$\omega = \bigcup_{j=1}^N \omega_j.$$

Как показано в [104], всякое решение системы (1.12)–(1.14) (или (1.24)), удовлетворяющее условию Гельдера H^* (1.5) с показателем $\alpha < 1$, удовлетворяет этому же условию с показателем

$\alpha = 1/2$, поэтому можно считать, например, что функции $\varphi_j^*(x_0)$, $\chi_j^*(x_0)$, в (26) непрерывны в $\bar{\omega}_j$.

Переведем с помощью замены переменных интервалы ω_j в интервал $(-1, 1)$ и образуем функции

$$\tilde{K}_{ij}(t, t_0) = \begin{cases} \delta_{ij} (\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2) \ln \left| \frac{\omega_j}{2} \right| + (1 - \delta_{ij}) (\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2) \ln |x^j - x_0^j| + \\ + \pi K_{11}(x^j, x_0^j), \quad i, j = 1, \dots, N; \\ \delta_{ij} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ln \left| \frac{\omega_j}{2} \right| + (1 - \delta_{ij}) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ln |x^j - x_0^j| + \\ + \pi K_{12}(x^j, x_0^j), \quad i = 1, \dots, N, j = N+1, \dots, 2N; \\ 2\delta_{ij} \ln \left| \frac{\omega_j}{2} \right| + 2(1 - \delta_{ij}) \ln |x^j - x_0^j| + \pi K_{21}(x^j, x_0^j), \\ \quad i = N+1, \dots, 2N, j = 1, \dots, N; \\ \pi K_{22}(x^j, x_0^j), \\ \quad i = N+1, \dots, 2N, j = N+1, \dots, 2N; \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(t) = \frac{a_{2i} + a_{2i-1}}{2} + \frac{a_{2i} - a_{2i-1}}{2} t, \quad t \in (-1, 1), \\ x_0^i &= x_0^i(t) = \frac{a_{2i} + a_{2i-1}}{2} + \frac{a_{2i} - a_{2i-1}}{2} t_0, \quad t_0 \in (-1, 1), \end{aligned} \quad (27)$$

$|\omega_j|$ – длина интервала ω_j ; δ_{ij} – символ Кронекера.

Далее образуем коэффициенты:

$$\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda) = - \begin{cases} \tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2, \quad 1 \leq i = j \leq N, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad 1 \leq i \leq N, \quad j = N+i, \\ 2, \quad 1 \leq j \leq N, \quad i = j+N, \\ 0, \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases} \quad (28)$$

и введем вектор неизвестных функций:

$$\boldsymbol{\tau}(t_0) = \left(\chi_1^*(x_0^1(t_0)), \dots, \chi_N^*(x_0^N(t_0)), \varphi_1^*(x_0^1(t_0)), \dots, \varphi_N^*(x_0^N(t_0)) \right),$$

$$t_0 \in (-1, 1).$$

Тогда систему (26) можно записать в виде (22) с неизвестной вектор-функцией $\tau(t_0)$, ядрами $\tilde{K}_{ij}(t, t_0)$ и коэффициентами $\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda)$; порядок системы $m = 2N$. Нетрудно проверить, что

$$\det(\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda)) = (-1)^N (2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^N \neq 0. \quad (29)$$

Отметим, что в этом случае определитель не зависит от λ .

В силу теоремы 1.1 условия (7) выполнены для всех функций $\tilde{K}_{ij}(t, t_0)$, при $p=0$ и $p=2$, поэтому задачу (26) можно рассматривать либо в пространствах F_0, F_2 , либо в F_2, F_4 . Тем не менее, это не приводит к неоднозначности.

Лемма 2. *Всякое решение системы (26), принадлежащее пространству F_0 , принадлежит F_2 .*

Доказательство. Пусть выполнено (26) и $\tau \in F_0$. Тогда, как следует из Теоремы 2, $\tilde{K}(\lambda)$ будет непрерывным оператором из F_0 в F_4 , $\tilde{K}(\lambda): F_0 \rightarrow F_4$. Следовательно, систему (26) можно записать в виде

$$\tilde{\alpha}(\lambda)L\tau = \mathbf{f}, \quad \tau \in F_0,$$

где через \mathbf{f} обозначено значение $\tilde{K}(\lambda)$ на элементе τ

$$\mathbf{f} = -K(\lambda)\tau, \quad \mathbf{f} \in F_4.$$

Но оператор $\tilde{\alpha}(\lambda)L$ непрерывно обратим и $\tilde{\alpha}^{-1}(\lambda)L^{-1}: F_4 \rightarrow F_2$, поэтому $\tau \in F_2$. Лемма доказана. #

Из леммы 2 следует, что можно, не ограничивая общности, рассматривать систему (26) сразу в пространствах (F_2, F_4) .

Условие непустоты резольвентного множества задачи (26) легко получается из результатов главы 1. В самом деле, в главе 1 было доказано (теорема 1.1.1), что все точки γ , лежащие вне некоторой полосы Π_l , являются регулярными точками пучка $L(\gamma)$, т.е краевая задача (1.1)–(1.5) при этих γ имеет только тривиальное решение. Отсюда в силу теоремы 1.2 получаем, что при этих γ , если только $\lambda = \gamma^2$ не совпадает с полюсом функции Грина, задачи (1.24) (или (26)) также имеет лишь тривиальное решение, поэтому из фредгольмовости $A(\lambda)$ заключаем, что в этих точках существует ограниченный оператор $A^{-1}(\lambda): F_4 \rightarrow F_2$ и $\rho(A) \neq \emptyset$.

Свойства функций $\tilde{K}_{ij}(t, t_0) = \tilde{K}_{ij}(t, t_0; \lambda)$ в зависимости от комплексного параметра λ будут подробно рассмотрены для случая

прямоугольников Ω_j в разделе 3. В частности, будет показано, что эти функции являются мероморфными в C . В связи с этим сформулируем полученные результаты в следующей форме.

Теорема 6. *Пусть о.-ф. $A(\lambda): F_2 \rightarrow F_4$, отвечающая системе интегральных уравнений (26), конечномероморфна в C , а в окрестности полюсов справедливо разложение (1.26), причем оператор A_0 в этом разложении фредгольмов. Тогда $A(\lambda)$ фредгольмова во всей комплексной плоскости, и спектр $\sigma(A)$ в C состоит из изолированного множества характеристических чисел конечной алгебраической кратности с единственной возможной предельной точкой в бесконечности. Точки вырождения отсутствуют. В области голоморфности $A(\lambda)$ для х.ч. и собственных векторов конечномерных о.-ф. $A_N(\lambda)$, построенных по правилам (21), (22), справедливы все утверждения о сходимости (i)–(ii) из теоремы 4.*

Доказательство. По сравнению с теоремой 5 новым здесь является утверждение о предельных точках $\sigma(A)$, а также об отсутствии точек вырождения; кроме того, снято ограничение $\rho(A) \neq \emptyset$. Первое из этих свойств следует из результатов работы [78], а остальные доказаны выше. #

Утверждение о том, что полюса (лежащие на границе области голоморфности) не могут быть предельными точками множества х.ч., является весьма существенным для применения численного метода, т.к. наличие предельных точек заметно осложнило бы расчет х.ч. в окрестности этих точек.

В заключение докажем, что условию (1.5) удовлетворяет всякое решение задачи (1.1)–(1.4). Действительно, задача (1.1)–(1.4) приводит к системе интегральных уравнений (26) с логарифмическими особенностями в ядрах (при выводе этой системы применения сингулярных интегралов можно избежать, проинтегрировав по x последнее условие в (1.3)). В силу оценок (1.4) можно считать, что $\chi_j^*, \varphi_j^* \in L_2$. Учитывая гладкость ядер $\tilde{K}_{ij}(t, t_0)$, из результатов работы [190] заключаем, что функции $\chi_j^*, \varphi_j^* \in \tilde{W}_2^1 = \Phi_2$. Остается применить утверждение 2, из которого следует справедливость условия Гельдера для функции χ_j^*, φ_j^* с показателем $0 < \mu = 1/4 \leq 1$, что и требовалось доказать.

Раздел 3. Свойства спектра волноведущей структуры – щелевой линии передачи

В разделе приводятся результаты исследования спектра для конкретной волноведущей структуры – щелевой линии передачи. Приводится конкретный вид системы интегральных уравнений. Даётся определение четных и нечетных волн для симметричных структур. Исследуются свойства систем в зависимости от спектрального параметра. Доказывается, что оператор-функции, отвечающие этим системам, являются конечномероморфными и фредгольмовыми во всей комплексной плоскости. Отсюда делается важный вывод об изолированности любого характеристического числа и об отсутствии конечных предельных точек множества характеристических чисел.

В данном разделе методы, изложенные в разделах 1, 2, применяются для анализа спектральных характеристик конкретной волноведущей структуры – щелевой линии передачи. Для этой волноведущей структуры возможно построение соответствующих функций Грина в явном виде. Аналитически выделяется логарифмическая особенность для следов функций Грина (в разделе 1 метод выделения особенности не был конструктивным). Выписывают явные формулы проекционного метода, изложенного в разделе 2, для щелевой линии передачи.

Результаты раздела (а также результаты конкретных расчетов и особенности численной реализации метода) содержатся в работах [3, 45, 97–100, 160].

§1 Интегральные оператор-функции для щелевой линии передачи. Четные и нечетные волны

Рассмотрим щелевую линию передачи, поперечное сечение которой изображено на рис. 4. В этом случае Ω_j – прямоугольник со сторонами a_j, b_j ,

$$\omega = \bigcup_{v=1}^N \omega_v, \quad \bar{\omega} \subset \left(-\frac{a_2}{2}, \frac{a_2}{2} \right), \quad a_2 \leq a_1;$$

коэффициент $\varepsilon = \varepsilon_j$ в Ω_j , $\operatorname{Im} \varepsilon_j = 0$, $\varepsilon_j \geq 1$; $j = 1, 2$.

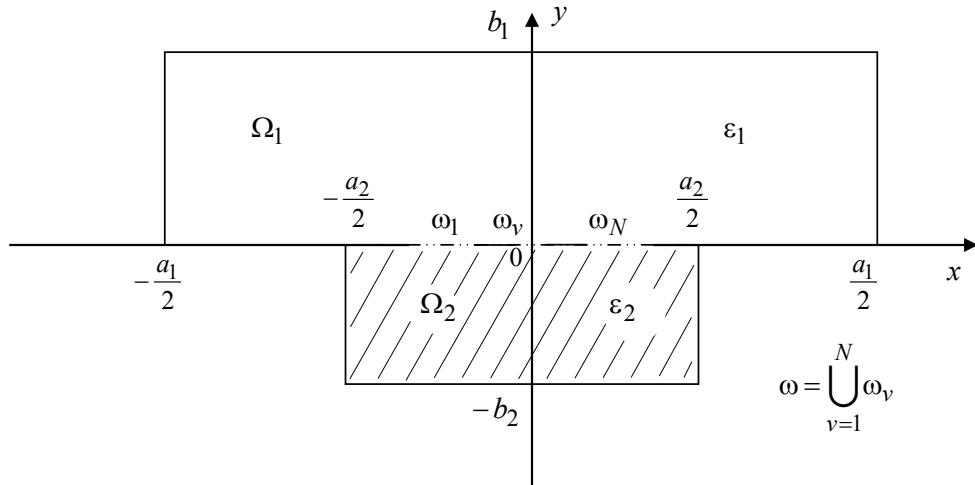


Рис. 4 Поперечное сечение щелевой линии передачи

Задача о нормальных волнах (1.1)–(1.5) для волноведущей структуры может быть сведена к эквивалентной спектральной задаче для оператор-функции, определяемой системой интегральных уравнений (1.12)–(1.14). Такой подход осуществим лишь тогда, когда известен явный вид функций Грина первой и второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца $\Delta u + \tilde{k}_j^2 u = 0$ в областях Ω_j . В данном случае для функции Грина хорошо известны представления в виде двойных рядов [90, 91, 119]:

$$\begin{aligned}
& G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0) = \\
& = \frac{4}{a_j b_j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \sin \frac{\pi m y}{b_j} \sin \frac{\pi m y_0}{b_j}}{\left(\frac{\pi n}{a_j} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b_j} \right)^2 - \tilde{k}_j^2}; \\
& G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0) = \\
& = \frac{4}{a_j b_j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi m y}{b_j} \cos \frac{\pi m y_0}{b_j}}{(1 + \delta_{0n})(1 + \delta_{0m}) \left(\left(\frac{\pi n}{a_j} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b_j} \right)^2 - \tilde{k}_j^2 \right)}; \quad (1)
\end{aligned}$$

$\tilde{k}_j^2 = \epsilon_j - \lambda$, δ_{kl} – символ Кронекера.

Эти функции определены во всей комплексной плоскости, за исключением множества полюсов $\lambda_{nm}^j = \varepsilon_j - \left(\frac{\pi n}{a_j} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b_j} \right)^2$, $n \geq 0$,

$$m \geq 0; \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \Lambda_j = \bigcup_{n,m} \lambda_{nm}^j.$$

Рассмотрим функции $\left. \frac{\partial}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0), G_j^\Psi(x, y, x_0, y_0)$,

фигурирующие в интегральных представлениях (1.6), (1.7) и преобразуем их, суммируя ряды по индексу m $\left(\lambda_n^j = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a_j} \right)^2 - \tilde{k}_j^2} \right)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} G_j^\Pi(x, y, x_0, y_0) &= (-1)^{j+1} \frac{2}{a_j} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n^j(b_j - |y|))}{\operatorname{sh}(\lambda_n^j b_j)}, \quad |y| > 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} G_j^\Psi(x, y, x_0, 0) &= \frac{2}{a_j} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n^j(b_j - |y|))}{\lambda_n^j \operatorname{sh}(\lambda_n^j b_j)}, \quad |y| > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что несмотря на радикалы, присутствующие в (2), (3), коэффициенты рядов не имеют точек ветвления и являются мероморфными функциями в C .

В качестве первообразной функции (2) по переменной x_0 выберем функцию

$$\begin{aligned} \tilde{G}_j^\Psi(x, y, x_0, 0) &= (-1)^j \frac{2}{\pi} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n^j(b_j - |y|))}{n \operatorname{sh}(\lambda_n^j b_j)}, \quad |y| > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В этом случае система интегральных уравнений (1.12)–(1.14) запишется так:

$$\int_{\omega} \left(\tilde{k}_1^2 G_1^\Psi(x, 0, x_0, 0) + \tilde{k}_2^2 G_2^\Psi(x, 0, x_0, 0) \right) \chi(x_0) dx_0 +$$

$$+\int_{\omega} \left(\varepsilon_1 G_1^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon_2 G_2^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) \right) \varphi(x_0) dx_0 = 0, x \in \omega; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\tilde{G}_1^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) + \tilde{G}_2^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) \right) \chi(x_0) dx_0 + \\ & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 \Theta_1(x, x_0) + \varepsilon_2 \Theta_2(x, x_0) \right) \varphi(x_0) dx_0 = 0, x \in \omega; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_{\omega_v} \varphi(x_0) dx_0 = 0, v = 1, \dots, N; \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} G_j^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) &= \frac{2}{a_j} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{\lambda_n^j}, \\ \tilde{G}_j^{\Psi}(x, 0, x_0, 0) &= -\frac{2\pi}{a_j^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \frac{n \operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{\lambda_n^j}, \\ \Theta_j(x, x_0) &= -\frac{2}{\pi} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{a_j} \left(x + \frac{a_j}{2} \right) \cos \frac{\pi n}{a_j} \left(x_0 + \frac{a_j}{2} \right) \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{n \lambda_n^j}. \end{aligned}$$

Если множество ω симметрично относительно нуля, то система (5)–(7) распадается на две независимые системы. Действительно, пусть $\chi(x_0) = \chi'(x_0) + \chi''(x_0)$, $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) + \varphi''(x_0)$ – разложение на нечетную и четную компоненты, и пусть выполнено (5)–(7). Тогда в уравнениях (5), (6) в слагаемых с нечетным индексом n останутся только функции $\chi'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, а в слагаемых с четным n – функции $\chi''(x_0)$, $\varphi''(x_0)$. Но в уравнении (5) ряд, образованный только нечетными слагаемыми, есть нечетная функция переменной x , а ряд с четными слагаемыми – четная, поэтому равенство нулю при всех $x \in \omega$ будет иметь место тогда и только тогда, когда обе эти функции тождественно равны нулю. Аналогично для уравнения (6) с той лишь разницей, что здесь четные функции переводят-

ся в нечетные, а нечетные – в четные. При таком разделении ядра систем несколько упрощаются:

– в нечетном случае:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega} \left(\tilde{k}_1^2 G'_1(x, 0, x_0, 0) + \tilde{k}_2^2 G'_2(x, 0, x_0, 0) \right) \chi'(x_0) dx_0 + \\
 & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 G'_1(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon_2 G'_2(x, 0, x_0, 0) \right) \varphi'(x_0) dx_0 = 0, x \in \omega; \\
 & \int_{\omega} \left(\hat{G}'_1(x, 0, x_0, 0) + \hat{G}'_2(x, 0, x_0, 0) \right) \chi'(x_0) dx_0 + \\
 & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 \Theta'_1(x, x_0) + \varepsilon_2 \Theta'_2(x, x_0) \right) \varphi'(x_0) dx_0 = 0, x \in \omega; \quad (8) \\
 G'_j(x, 0, x_0, 0) &= \frac{2}{a_j} \sum_n' \sin \frac{\pi n x}{a_j} \sin \frac{\pi n x_0}{a_j} \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{\lambda_n^j}, \\
 \hat{G}'_j &= \frac{\partial}{\partial x} G'_j, \quad \Theta'_j(x, x_0) = -\frac{2}{\pi} \sum_n' \cos \frac{\pi n x}{a_j} \sin \frac{\pi n x_0}{a_j} \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{n \lambda_n^j},
 \end{aligned}$$

\sum_n' – суммирование ведется только по нечетным индексам;

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega} \left(\tilde{k}_1^2 G''_1(x, 0, x_0, 0) + \tilde{k}_2^2 G''_2(x, 0, x_0, 0) \right) \chi''(x_0) dx_0 + \\
 & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 G''_1(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon_2 G''_2(x, 0, x_0, 0) \right) \varphi''(x_0) dx_0 = 0, x \in \omega; \\
 & \int_{\omega} \left(\hat{G}''_1(x, 0, x_0, 0) + \hat{G}''_2(x, 0, x_0, 0) \right) \chi''(x_0) dx_0 + \\
 & + \int_{\omega} \left(\varepsilon_1 \Theta''_1(x, x_0) + \varepsilon_2 \Theta''_2(x, x_0) \right) \varphi''(x_0) dx_0 = 0, x \in \omega; \quad (9) \\
 \int_{\omega_v} \varphi''(x_0) dx_0 &= 0, v = 1, \dots, N;
 \end{aligned}$$

– в четном случае:

$$\begin{aligned}
 G''_j(x, 0, x_0, 0) &= \frac{2}{a_j} \sum_{n \geq 0}'' \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \frac{\pi n x}{a_j} \cos \frac{\pi n x_0}{a_j} \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{\lambda_n^j}, \\
 \hat{G}''_j &= \frac{\partial}{\partial x} G''_j, \quad \Theta''_j(x, x_0) = -\frac{2}{\pi} \sum_n'' \sin \frac{\pi n x}{a_j} \cos \frac{\pi n x_0}{a_j} \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n^j b_j)}{n \lambda_n^j},
 \end{aligned}$$

$\sum_{n \geq 0}''$ – суммирование ведется по четным индексам.

Если системы (8), (9) рассматривать в пространствах

$$\begin{aligned}\Phi'_p &= \left\{ \varphi \mid \varphi(t) = \sum_n^{\infty} \xi_n T_n(t), \xi \in h_p \right\}, \\ \Phi''_p &= \left\{ \varphi \mid \varphi(t) = \sum_n^{\infty} \xi_n T_n(t) + \frac{\xi_0}{2}, \xi \in h_p \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

то свойство фредгольмовости этих систем сохраняется.

Определение 1. Решения систем (8) и (9) (и построенные по формулам (1)–(3), (1.6)–(1.8) поля **E** и **H**) будем называть соответственно нечетными и четными волнами структуры.

Такое определение согласуется с общепринятым [100]. Отметим, что разбиение общего случая (5)–(7) на две независимые системы (8) и (9) в два раза сокращает объем вычислений, производимых при расчетах характеристического числа.

§2 Свойства спектра щелевой линии передачи

Общие свойства спектра щелевой линии передачи описываются теоремами 1.1.1–1.1.3. Здесь мы докажем теорему, дополняющую результаты главы 1.

Нелинейные задачи на собственные значения (5)–(9) можно рассматривать не только в области голоморфности соответствующей оператор-функции, но также и в полюсах Λ . По определению полюс λ_0 является характеристическим числом о.-ф. $A(\lambda)$, если существует голоморфная в окрестности λ_0 вектор-функция $\varphi(\lambda)$ такая, что $\psi(\lambda) = A(\lambda)\varphi(\lambda)$ голоморфна в окрестности λ_0 и $\psi(\lambda_0) = 0$ [78]. Такой подход позволяет рассматривать задачу на собственные значения во всей комплексной плоскости. Ниже мы установим конечномероморфность и фредгольмовость в C оператор-функций, отвечающих системам (5)–(9).

Рассмотрим ядро

$$G^\Psi(x, 0, x_0, 0) = \frac{2}{a_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \frac{\pi n x}{a_j} \cos \frac{\pi n x_0}{a_j} \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n b_j)}{\lambda_n}, \quad 0 \leq x, x_0 \leq a,$$

и выделим его главную часть, содержащую особенность

$$\begin{aligned}G^\Psi(x, 0, x_0, 0) &= -\frac{1}{\pi} \ln \left| 2 \sin \pi \frac{x - x_0}{2a} \right| - \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \sin \pi \frac{x + x_0}{2a} \right) + \\ &+ \frac{1}{a} \frac{\operatorname{cth}(b \sqrt{-\tilde{k}^2})}{\sqrt{-\tilde{k}^2}} + \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi n x_0}{a} \left(\frac{\operatorname{cth}(\lambda_n b)}{\lambda_n} - \frac{a}{\pi n} \right).\end{aligned}$$

Если $\lambda \neq \varepsilon - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$, то в некоторой окрестности точки λ при достаточно большом n , $n \geq n_0$, для коэффициентов оставшегося ряда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n b)}{\lambda_n} - \frac{a}{\pi n} \right| &= \left| \frac{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \operatorname{sh}^{-2}(\lambda_n b) + \tilde{k}^2}{\lambda_n \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \left(\lambda_n + \frac{\pi n}{a} \operatorname{cth}(\lambda_n b)\right)} \right| \leq \frac{c}{n^3}; \\ \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n b)}{\lambda_n} \right| &= \left| \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(\frac{b}{\operatorname{sh}^2(\lambda_n b)} + \frac{\operatorname{cth}(\lambda_n b)}{\lambda_n} \right) \right| \leq \frac{c}{n^3}, \end{aligned} \quad (11)$$

из которых следует возможность почлененного дифференцирования ряда и голоморфность функции, образуемой этим рядом, в окрестности точки λ . Здесь так же, как и выше, коэффициенты ряда – мероморфные функции параметра λ , причем все полюса лежат левее точки ε на вещественной оси.

Для слагаемых главной части можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \ln \left| 2 \sin \pi \frac{x - x_0}{2a} \right| + \frac{1}{\pi} \ln \left| 2 \sin \pi \frac{x + x_0}{2a} \right| &= \\ = \frac{1}{\pi} \ln |x - x_0| + \frac{1}{\pi} \ln (x + x_0) + \frac{1}{\pi} \ln (2a - x - x_0) + N(x, x_0), \end{aligned}$$

где $N(x, x_0)$ бесконечно дифференцируема по переменным x, x_0 . Если $0 < x, x_0 < a$, то второе и третье слагаемые не дают особенностей; в противном случае имеет место «неподвижная» особенность при $x = x_0 = 0, x = x_0 = a$.

Далее рассмотрим интегральную о.-ф. $M(\lambda)$ в окрестности полюса

$$\begin{aligned} M(\lambda)\varphi &= \int_{l_1}^{l_2} G^\Psi(x, 0, x_0, 0) \varphi(x_0) dl, \quad 0 < l_1 < l_2 < a; \\ dl &= \frac{dx_0}{\sqrt{(l_2 - x_0)(x_0 - l_1)}}, \quad \tilde{\varphi}(t) = \varphi\left(\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{l_2 - l_1}{2}t\right) \in \Phi_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть λ_0 – полюс функции $G^\Psi(x, 0, x_0, 0)$, $\lambda \in \Lambda_0$. Ясно, что существует конечное число пар индексов $(n_1, m_1), \dots, (n_s, m_s)$, $s \geq 1$, при которых $\lambda_{n_1 m_1} = \dots = \lambda_{n_s m_s} = \lambda_0$. Перепишем (12), группируя слага-

гаемые, содержащие полюс, и выделим логарифмическую особенность в оставшейся части ряда, получим представление

$$\begin{aligned} M(\lambda)\varphi = & -\int_{l_1}^{l_2} \frac{1}{\pi} \ln|x-x_0| \varphi(x_0) dl + \\ & + \frac{4}{ab} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \sum_{(n_1, \dots, n_s)(m_1, \dots, m_s)} \frac{1}{1+\delta_{0n}} \frac{1}{1+\delta_{0m}} \cos \frac{\pi n x}{a} \int_{l_1}^{l_2} \cos \frac{\pi n x_0}{a} \varphi(x_0) dl + \\ & + \int_{l_1}^{l_2} \tilde{K}_0(x, x_0, \lambda) \varphi(x_0) dl = L\varphi + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} T_s \varphi + \tilde{K}_0(\lambda) \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

где $T_s = T_s(\lambda_0)$ – конечномерный оператор; L – обратимый оператор, а $\tilde{K}_0(\lambda_0)$ – компактный оператор (в силу теоремы 2.2), причем о.-ф. $\tilde{K}_0(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности точки λ_0 . Из представления (13) следует, что о.-ф. $M(\lambda)$ конечномероморфна и фредгольмова во всей комплексной плоскости, т.к. фредгольмовость в области голоморфности была доказана в разделе 2.

Результаты, полученные для скалярной о.-ф. $M(\lambda)$ легко переносятся на случай систем (5)–(9). Для этого по формулам (1.21), (1.22) приведем указанные системы к логарифмическому виду и разложим соответствующую оператор-функцию в ряд Лорана в окрестности полюса. В результате этих действий аналогично (13) получим

$$A(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_{nm}^j} T_{nm}^{(j)} + \tilde{L}_{nm}^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_{nm}^j) A_{i,nm}^{(j)}, \quad (14)$$

где оператор $T_{nm}^{(j)}$ конечномерен, $\tilde{L}_{nm}^{(j)}$ – фредгольмов, а оставшийся ряд сходится по норме в некоторой окрестности точки λ_{nm}^j . Голоморфность $A(\lambda)$ в точках, отличных от полюсов, сразу следует из оценок (11).

Таким образом, системы (5)–(9) могут быть сведены к конечномероморфным о.-ф., для которых спектральная задача рассматривается уже во всей комплексной плоскости и справедливы все утверждения теоремы 2.6.

Мы не будем рассматривать вопрос о спектральной эквивалентности задачи (5)–(7) и исходной краевой задачи при $\lambda = \lambda_{nm}^j \in \Lambda$, но отметим, что утверждение об изолированности спектра во всей комплексной плоскости сохраняет силу в любом случае.

Сформулируем этот наиболее важный для численных расчетов факт в виде теоремы.

Теорема 1. *Спектр щелевой линии передачи представляет собой изолированное множество в C .*

Глава 3. Методы решения нелинейных краевых задач на собственные значения

Раздел 1. Задача о распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой

Распространение светового луча в однородной нелинейной среде или в волноведущей структуре с нелинейной средой, описываемой по закону Керра, активно исследуется в течение последних двух десятилетий [33–35, 37, 38]. Эффекты самофокусировки и «самоканализации» луча в лазерах и оптоэлектронных устройствах также изучаются и применяются на практике [2, 142]. При распространении резко неоднородной волны – «луча» лазера, в определенных условиях волновому процессу сопутствует образование канала, направляющего его энергию. В этом случае процесс распространения волны происходит подобно распространению волны в диэлектрическом волноводе с нелинейной средой, описываемой по закону Керра. Распространение ТЕ-поляризованных волн в трехслойной среде без потерь, один из слоев которой заполнен нелинейной средой, подробно исследовано в [33–35, 37]. В этих работах были получены аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений, выраженные с помощью эллиптических функций, а также представлены численные результаты расчетов. Однако при изучении других структур, например круглого диэлектрического волновода, уже не удается получить аналитические решения, но возможно применение численных методов. Кроме того, для анализа вопроса о существовании и единственности решений краевой задачи приходится привлекать методы функционального анализа исследования нелинейных операторов.

В этом разделе изучаются электромагнитные волны, распространяющиеся в диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Проблема сводится к нелинейному интегральному уравнению с ядром в виде функции Грина для уравнения Бесселя. Существование распространяющихся ТЕ-поляризованных волн доказывается с помощью принципа Шаудера и методом сжимающих отображений. Для численного решения задачи предложен итерационный алго-

ритм, доказана его сходимость. Доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения волновода. Получены условия, когда могут распространяться несколько волн, указаны области локализации соответствующих постоянных распространения.

Результаты раздела опубликованы в работах [36, 46, 169, 176–178, 180].

§1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть все трехмерное пространство \mathbb{R}^3 заполнено изотропной средой без источников с $\epsilon_1 = \text{const}$. В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод однородного заполнения с образующей, параллельной оси Oz , и поперечным сечением $W := \{x : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$. Пусть диэлектрическая проницаемость ϵ_2 внутри цилиндра определяется по закону Керра:

$$\epsilon_2 = \epsilon_f + a_f |\mathbf{E}|^2,$$

где α и ϵ_2 – вещественные положительные константы. Здесь ϵ_2 – постоянная составляющая проницаемости ϵ ; α – коэффициенты нелинейности.

Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, т.е. собственные волны структуры. Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon \mathbf{E}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H}, \quad (2)$$

условиям непрерывности касательных составляющих поля H_τ и E_τ при переходе через границу волновода и условиям затухания поля на бесконечности.

Перейдем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) . Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho; \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = i\omega \mu H_z; \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -i\omega \epsilon E_\rho; \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega \epsilon E_\varphi; \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\omega \epsilon E_z. \quad (8)$$

В случае ТЕ-поляризации предположим, что $\mathbf{E} = \{0; E_\varphi; 0\}$, $\mathbf{H} = \{H_\rho; 0; H_z\}$. В результате уравнения (3)–(8) приведутся к виду

$$-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega \mu H_\rho; \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) = i\omega \mu H_z; \quad (10)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega \epsilon E_\varphi; \quad (12)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (11) и (13) следует, что $H_z = H_z(\rho, z)$ и $H_\rho = H_\rho(\rho, z)$ не зависят от φ . Из уравнений (9) и (10) находим

$$H_\rho = -\frac{1}{i\omega \mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega \mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi). \quad (14)$$

Подстановка H_ρ и H_z в (12) дает

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu E_\varphi = 0. \quad (15)$$

Решение задачи будем искать в форме осесимметричных волн $E_\varphi(\rho, z) = u(\rho) e^{i\gamma z}$. Таким образом, (15) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{1}{\rho} (\rho u)' \right)' + (\omega^2 \varepsilon \mu - \gamma^2) u = 0, \quad (16)$$

где производная означает дифференцирование по ρ . Во внешней области, учитывая, что $\varepsilon = \varepsilon_1$, получаем уравнение Бесселя:

$$u'' + \frac{1}{\rho} u' - \frac{1}{\rho^2} u + k^2 u = 0, \quad \rho > R, \quad (17)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu - \gamma^2$.

Внутри волновода, где $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{E}|^2$, получаем кубическое нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u'' + \frac{1}{\rho} u' - \frac{1}{\rho^2} u + k^2 u = 0, \quad \rho > R, \quad (18)$$

где $\alpha = \omega^2 \alpha \mu$, $k^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu - \gamma^2$. Условия сопряжения на поверхности волновода преобразуются к виду $[E_\varphi]_{\rho=R} = 0$ и $[H_z]_{\rho=R} = 0$, что дает

$$[u]_{\rho=R} = 0 \quad \text{и} \quad [u']_{\rho=R} = 0, \quad (19)$$

где $[v]_{\rho=R} = v(R-0) - v(R+0)$ – скачок предельных значений функции в точке R . Спектральным параметром задачи является γ .

Сформулируем теперь краевую задачу на собственные значения, к которой свелась исходная задача о распространяющихся поверхностных волнах цилиндрического волновода. Требуется отыскать ненулевую функцию $u(\rho)$ и соответствующие собственные значения γ такие, что $u(\rho)$ удовлетворяет уравнениям (17), (18), условиям сопряжения (19) и условиям экспоненциального убывания функции $u(\rho)$ на бесконечности при $\rho \rightarrow \infty$.

Запишем решение уравнения Бесселя (17) в виде

$$u = C_1 H_1^{(1)}(k\rho), \quad \rho > R, \quad (20)$$

где C_1 – константа, $H_1^{(1)}$ – функция Ханкеля. Если $\operatorname{Re} k = 0$, то

$$u = C_1 K_1(|k|\rho), \quad \rho > R, \quad (21)$$

где K_1 – функция Макдональда. Условия выполняются, потому что $K_1(|k|\rho) \rightarrow 0$ экспоненциально, в то время как $\rho \rightarrow \infty$. Обозначим электрическую составляющую поля на границе волновода через E_0 , $E_0 = C_1 K_1(|k|\rho)$.

§2 Нелинейное интегральное уравнение

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение (18), записанное в виде

$$(\rho u')' + \left(k^2 \rho - \frac{1}{\rho} \right) u + \alpha \rho u^3 = 0, \quad (22)$$

и линейное уравнение Бесселя

$$\rho u'' + u' + \left(k^2 \rho - \frac{1}{\rho} \right) u = 0. \quad (23)$$

Перепишем последнее уравнение в операторной форме:

$$Lu = 0, \quad L = \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + \left(k^2 \rho - \frac{1}{\rho} \right). \quad (24)$$

Построим функцию Грина для краевой задачи

$$LG = -\delta(\rho - \rho_0),$$

$$G|_{\rho=0} = G'|_{\rho=0} = 0 \quad (0 < \rho_0 < R)$$

в виде (см., например, [49])

$$G(\rho, \rho_0) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{J_1(k\rho)J_1(k\rho_0)}{J_1(kR)} N_1(kR) - J_1(k\rho_<)N_1(k\rho_>) \right], \quad 0 \leq \rho, \quad \rho_0 \leq R, \quad (25)$$

где

$$\rho_< = \min\{\rho, \rho_0\}, \quad \rho_> = \max\{\rho, \rho_0\}. \quad (26)$$

Функция Грина существует при таких значениях параметров, что $J'_1(kR) \neq 0'$.

Запишем уравнение (18) в операторном виде:

$$Lu + aB(u) = 0, \quad B(u) = \rho u^3. \quad (27)$$

Используя вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} \int_0^R (\nu Lu - u L\nu) d\rho &= \int_0^R \left(\nu (\rho u')' - u (\rho \nu')' \right) d\rho = \\ &= R(u'(R)\nu(R) - \nu'(R)u(R)) \end{aligned} \quad (28)$$

и полагая $\nu = G$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^R (GLu - uLG) d\rho &= R(u'(R-0) G(R, \rho_0) - G'(R, \rho_0) u(R-0)) = \\ &= Ru'(R-0) G(R, \rho_0). \end{aligned} \quad (29)$$

Используя уравнение (27), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^R (GLu - uLG) d\rho &= R(u'(R-0) G(R, \rho_0) - G'(R, \rho_0) u(R-0)) = \\ &= Ru'(R-0) G(R, \rho_0), \end{aligned} \quad (30)$$

получаем интегральное представление решения $u(\rho_0)$ уравнения (18) на интервале $[0, R]$:

$$u(\rho_0) = \alpha \int_0^R G(\rho, \rho_0) \rho u^3(\rho) d\rho + Ru'(R-0) G(R, \rho_0), \quad 0 \leq \rho_0 \leq R. \quad (31)$$

Принимая во внимание условия сопряжения $u'(R-0) = u'(R+0)$, перепишем уравнение (31) в виде

$$u(\rho_0) = \alpha \int_0^R G(\rho, \rho_0) \rho u^3(\rho) d\rho + f(\rho_0), \quad 0 \leq \rho_0 \leq R, \quad (32)$$

где

$$f(\rho_0) = Ru'(R-0) G(R, \rho_0), \quad (33)$$

$$G(R, \rho_0) = \frac{1}{kR} \frac{J_1(k\rho_0)}{J'_1(kR)}. \quad (34)$$

Из уравнения (32) и условий сопряжения $u(R-0) = u(R+0)$ следует дисперсионное соотношение

$$u(R+0) = \alpha \int_0^R G(\rho, R) \rho u^3(\rho) d\rho + Ru'(R+0) G(R, R). \quad (35)$$

Положим $N(\rho, \rho_0) = \alpha G(\rho, \rho_0) \rho$ и рассмотрим интегральное уравнение на интервале $C[0, R]$ [185]:

$$u(\rho_0) = \int_0^R N(\rho, \rho_0) u^3(\rho) d\rho + f(\rho_0). \quad (36)$$

Предполагается, что $f \in C[0, R]$ и $J'_1(kR) \neq 0$. Нетрудно видеть, что ядро $N(\rho, \rho_0)$ является непрерывной функцией в квадрате $0 \leq \rho, \rho_0 \leq R$.

Рассмотрим в $C[0, R]$ линейный интегральный оператор

$$N_{\omega} = \int_0^R N(\rho, \rho_0) \omega(\rho) d\rho. \quad (37)$$

Он ограничен, вполне непрерывен и

$$\|N\| = \max_{\rho_0 \in [0, R]} \int_0^R |N(\rho, \rho_0)| d\rho. \quad (38)$$

Поскольку нелинейный оператор $B_0(u) = u^3(\rho)$ ограничен и непрерывен в $C[0, R]$, то нелинейный оператор

$$F(u) = \int_0^R N(\rho, \rho_0) u^3(\rho) d\rho + f(\rho_0) \quad (39)$$

является вполне непрерывным на каждом ограниченном в $C[0, R]$ множестве.

В последующих рассуждениях нам понадобится следующее вспомогательное числовое кубическое уравнение:

$$\|N\| r^3 + \|f\| = r, \quad (40)$$

где норма оператора $\|N\| > 0$ определяется формулой (39), а

$$\|f\| = \max_{\rho_0 \in [0, R]} |f(\rho_0)|. \quad (41)$$

Рассмотрим уравнение

$$r - \|N\| r^3 = \|f\| \quad (42)$$

и функцию

$$y(r) := r - \|N\| r^3. \quad (43)$$

Функция $y(r)$ имеет только одну положительную точку максимума:

$$r_{\max} = \frac{1}{\sqrt[3]{3\|N\|}}, \quad (44)$$

значение функции в которой равно

$$y_{\max} = y(r_{\max}) = \frac{2}{3\sqrt[3]{3\|N\|}}. \quad (45)$$

Тогда, при условии

$$0 \leq \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}$$

уравнение (42) имеет два неотрицательных корня r_* и r^* , $r_* \leq r^*$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq r_* \leq \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}; \quad (46)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}} \leq r^* \leq \frac{1}{\sqrt{\|N\|}}. \quad (47)$$

Эти корни нетрудно выписать как решения кубического уравнения

$$r^3 - \frac{1}{\sqrt{\|N\|}} r + \frac{\|f\|}{\|N\|} = 0. \quad (48)$$

Имеем

$$r_* = -2 \sqrt{\frac{1}{3 \|N\|}} \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right)}{3} - \frac{2\pi}{3} \right); \quad (49)$$

$$r^* = -2 \sqrt{\frac{1}{3 \|N\|}} \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right)}{3} + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (50)$$

Если

$$\|f\| = 0, \text{ то } r_* = 0 \text{ и } r^* = \frac{1}{\sqrt{\|N\|}}; \quad 0 < \|f\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}},$$

то

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}. \quad (51)$$

При $\|f\| = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}$ имеем $r_* = r^* = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Если выполняется неравенство

$$0 \leq \|f\| = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}, \quad (52)$$

то уравнение (40) имеет два неотрицательных решения r_* и r^* , $r_* < r^*$.

Используя принцип Шаудера [53, 185], можно доказать, что для каждого $f \in S_p(0) \subset C[0, R]$, где $\hat{\rho} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}$, существует ре-

шение $u(\rho)$ уравнения (36) внутри шара $S^* = S_{r^*}(0)$.

Лемма 2. Если $\|f\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3 \|N\|}}$, то уравнение (36) имеет, по

крайней мере, одно решение u $\|u\| \leq r^*$.

Доказательство. Так как $F(u)$ абсолютно непрерывен, необходимо только проверить, что F переводит шар в себя. Предположим, что $u \in S^*$. Используя (37)–(39), получаем

$$\|F(u)\| \leq \|N\| \cdot \|u\|^3 + \|f\| \leq \|N\| (r^*)^3 + \|f\| = r^*.$$

Это означает, что $FS^* \subset S^*$. Лемма доказана. #

Теперь докажем, что если выполняется условие (42), то (37) имеет единственное решение u в шаре $S_* = S_{r_*}$.

Теорема 1. Если $\alpha \leq A$, где

$$A = \frac{2}{3} \frac{1}{\|f\| \sqrt{3 \|N_0\|}} \quad (53)$$

и

$$\|N_0\| = \max \int_0^R |\rho G(\rho, \rho_0)| d\rho,$$

то уравнение (36) имеет единственное решение u , являющееся непрерывной функцией:

$$u \in C[0, R], \quad \|u\| \leq r_*.$$

Доказательство. Если $u \in S_*$, то

$$\|F(u)\| \leq \|N\| \cdot \|u\|^3 + \|f\| \leq \|N\| (r^*)^3 + \|f\| = r^*.$$

Если $u_1, u_2 \in S_*$, то

$$\|F(u_1) - F(u_2)\| = \left\| \int_0^R N(\rho, \rho_0) (u_1^3(\rho)) - u_2^3(\rho) d\rho \right\| \leq 3Nr_*^2 \|u_1 - u_2\|.$$

Так как $\alpha \leq A$, то $f(\rho_0)$ удовлетворяет условию (52). Поэтому выполняется неравенство (51), откуда $3\|N\|r_*^2 < 1$.

Следовательно, F отображает S_* в себя и является сжимающим оператором на S_* . Поэтому уравнение (36) имеет единственное решение в S_* . Теорема доказана. #

Отметим, что $A > 0$ и не зависит от α .

В дальнейшем нам понадобится утверждение о зависимости решений интегрального уравнения (36) от параметра.

Теорема 2. Пусть ядро N и правая часть f интегрального уравнения (36) непрерывно зависят от параметра $\lambda \in \Lambda_0$, $N(\lambda, \rho, \rho_0) \subset C(\Lambda_0 \times [0, R] \times [0, R])$, $f(\lambda, \rho_0) \subset C(\Lambda_0 \times [0, R])$, на некотором отрезке Λ_0 вещественной числовой оси. Пусть также

$$0 < \|f(\lambda)\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N(\lambda)\|}}. \quad (54)$$

Тогда решения $u(\lambda, \rho)$ уравнения (36) при $\lambda \in \Lambda_0$ существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра λ , $u(\lambda, \rho) \subset C(\Lambda_0 \times [0, R])$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$u(\rho_0, \lambda) = \int_0^R N(\lambda, \rho, \rho_0) u^3(\rho, \lambda) d\rho + f(\rho_0, \lambda). \quad (55)$$

Существование и единственность решений $u(\lambda)$ при условиях теоремы 2 следует из теоремы 1. #

Докажем непрерывную зависимость этих решений от параметра λ .

Нетрудно видеть из формулы (49), что $r_*(\lambda)$ непрерывно зависит от λ на отрезке Λ_0 . Пусть $r_0 = \max_{\lambda \in \Lambda_0} r_*(\lambda)$, и максимум достигается в точке λ_0 , $r_*(\lambda_0) = r_0$.

Далее, пусть $Q = \max_{\lambda \in \Lambda_0} (3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\|)$, и максимум достигается в точке $\hat{\lambda} \in \Lambda_0$, $Q = 3r_*^2(\hat{\lambda}) \|N(\hat{\lambda})\|$. Тогда $Q < 1$ в силу условия (54) теоремы.

Предположим сначала, что $\|u(\lambda)\| \geq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
& |u(\rho_0, \lambda + \Delta\lambda) - u(\rho_0, \lambda)| = \\
& = \left| \int_0^R N(\lambda + \Delta\lambda, \rho, \rho_0) u^3(\rho, \lambda + \Delta\lambda) d\rho - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^R N(\lambda, \rho, \rho_0) u^3(\rho, \lambda) d\rho + (f(\rho_0, \lambda + \Delta\lambda) - f(\rho_0, \lambda)) \right| \leq \\
& \leq \int_0^R |N(\lambda + \Delta\lambda, \rho, \rho_0) - N(\lambda, \rho, \rho_0)| \cdot |u(\lambda_0, \lambda, \Delta\lambda)|^3 d\rho + \\
& \quad + \int_0^R |N(\lambda, \rho, \rho_0)| \cdot |u^3(\rho, \lambda + \Delta\lambda) - u^3(\rho, \lambda)| d\rho + \\
& \quad + |f(\rho_0, \lambda + \Delta\lambda) - f(\rho_0, \lambda)| \leq \\
& \leq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|^3 \int_0^R |N(\lambda + \Delta\lambda, \rho, \rho_0) - N(\lambda, \rho, \rho_0)| d\rho + \\
& + \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| (\|u(\lambda + \Delta\lambda)\|^2 + \|u(\lambda + \Delta\lambda)\| \cdot \|u(\lambda)\| + \|u(\lambda)\|^2) \times \\
& \quad \times \int_0^R |N(\lambda, \rho, \rho_0)| d\rho + \\
& + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\| \leq r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \\
& + \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| 3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
& \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \leq \\
& \leq \frac{1}{1 - 3r_*^2(\lambda) \|N(\lambda)\|} (r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\|,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \leq \\ & \leq \frac{1}{1-Q} \left(r_0^3 \|N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)\| + \|f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)\| \right), \end{aligned} \quad (56)$$

где Q и r_0 не зависят от λ .

Пусть теперь $\|u(\lambda)\| < \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$. Тогда все предыдущие оценки остаются в силе, если заменить аргументы λ на $\lambda + \Delta\lambda$, а $\lambda + \Delta\lambda$ на λ . Таким образом, оценка (56) также остается в силе, откуда следует утверждение теоремы. Теорема доказана. #

§3 Итерационный метод

Приближенные решения u_n интегрального уравнения (36), представимого в виде $u = F(u)$, могут быть определены итерационным процессом $u_{n+1} = F(u_n)$, $n = 0, 1, \dots$,

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \alpha \int_0^R G(\rho, \rho_0) \rho u_n^3 d\rho + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad (57)$$

Последовательность u_n равномерно сходится к решению u уравнения (36) вследствие того, что $F(u)$ – сжимающий оператор. Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма (57). Сформулируем эти результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Последовательность приближенных решений u_n уравнения (36), определяемых посредством итерационного алгоритма (57), существует и сходится в норме пространства $C[0, R]$ к (единственному) точному решению u этого уравнения, и верна оценка скорости сходимости:*

$$\|u_n - u\| \leq \frac{q^n}{1-q} f(u_0), \quad n \rightarrow \infty, \quad (58)$$

где $q := 3Nr_*^2 < 1$ – коэффициент сжатия отображения F .

§4 Существование решений дисперсионного уравнения

Вводя безразмерные переменные и постоянные

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= k_0 \rho, \quad \tilde{z} = k_0 z, \quad \tilde{R} = k_0 R, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_0, \quad \tilde{\mu} = \mu / \mu_0 = 1, \\ \tilde{k}_2 &= \sqrt{\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\gamma}^2}, \quad k_1 = \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - \varepsilon_2} \left(\tilde{\varepsilon}_2 > \tilde{\varepsilon}_1 \right), \quad \tilde{\gamma} = \gamma / k_0, \quad \tilde{\alpha} = \alpha C_1^2 / \varepsilon_0, \\ \tilde{u} &= u / C_1, \quad k_0 = \tilde{\omega}^2 \varepsilon_0 \tilde{\mu}_0, \end{aligned}$$

опуская тильду и принимая во внимание (21), дисперсионное соотношение (35) может быть представлено в нормализованной форме:

$$K_1(k_1 R) - K'_1(k_1 R) k_1 R G(R, R) = \alpha \int_0^R G(\rho, R) \rho u^3(\rho) d\rho. \quad (59)$$

Из выражения (34) и свойств цилиндрических функций следует, что

$$\begin{aligned} G(R, R) &= \frac{1}{k_2 R} \frac{J_1(k_2 R)}{J'_1(k_2 R)}; \\ k_2 R J'_1(k_2 R) &= -J_1(k_2 R) + k_2 R J_0(k_2 R); \\ -k_1 R K'_1(k_1 R) &= k_1 R K_0(k_1 R) + K_1(k_1 R). \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (59), мы можем переписать дисперсионное соотношение в другой форме:

$$\begin{aligned} k_2 R K_1(k_1 R) J_0(k_2 R) - k_1 R K_0(k_1 R) J_1(k_2 R) &= \\ = \alpha \int_0^R J_1(k_2 \rho) \rho u^3(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (60)$$

или иначе

$$g(\gamma) = \alpha F(\gamma), \quad (61)$$

где

$$g(\gamma) = k_2 R K_1(k_1 R) J_0(k_2 R) - k_1 R K_0(k_1 R) J_1(k_2 R), \quad (62)$$

$$F(\gamma) = \int_0^R J_1(k_2 \rho) \rho u^3(\rho) d\rho. \quad (63)$$

Нули функции $\Phi(\gamma) \equiv g(\gamma) - \alpha F(\gamma)$ – это значения γ , для которых существует нетривиальное решение задачи P , сформулированной ранее. Следующее утверждение дает достаточные условия существования нулей функции Φ .

Пусть j_{0m} – m -й положительный корень функции Бесселя J_0 ; j_{1m} – m -й положительный корень функции Бесселя J_1 ; j'_{1m} – m -й положительный корень функции Бесселя J'_1 ; $m = 1, 2, \dots$

Мы имеем

$$\begin{aligned} j'_{11} &= 1,841 \dots, \quad j_{01} = 2,405 \dots, \quad j_{11} = 3,832 \dots, \\ j'_{12} &= 5,331 \dots, \quad j_{02} = 5,520 \dots, \quad j_{12} = 7,016 \dots, \\ j'_{13} &= 8,536 \dots, \quad j_{03} = 8,654 \dots, \quad j_{13} = 10,173 \dots, \\ j'_{14} &= 11,706 \dots, \quad j_{04} = 11,792 \dots, \quad j_{14} = 13,324 \dots. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\lambda_{1m} = \varepsilon_2 - j_{1m}^2/R^2; \quad \lambda_{2m} = \varepsilon_2 - j_{0m}^2/R^2,$$

$m = 1, 2, \dots$

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и α – три числа, удовлетворяющие условиям $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ и $0 < \alpha \leq \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = \min \left(\min_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda), \frac{\min_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq i \leq m} |g(\lambda_{1i})|}{0,3R^2 \left(\max_{\lambda \in \Lambda} r_*(\lambda) \right)^3} \right), \quad (64)$$

и выполняются условия

$$\lambda_{1m} > \varepsilon_1 \quad (65)$$

при $m = 1, 2, 3$ или 4 . Тогда существует по крайней мере m значений $\gamma_i, i = 1, \dots, m$, таких, что задача P имеет ненулевое решение.

Доказательство. Пусть $\lambda = \gamma^2$,

$$\Lambda_i = [\lambda_{1i}, \lambda_{2i}], \quad \Lambda = \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i$$

и

$$\|u\| \leq r_* = r_*(\lambda).$$

Так как $j'_{1i} \notin \Lambda$ для $i = 1, 2, 3, 4$, то функция Грина (25) существует для $\gamma^2 \in \Lambda$. Из формулы (53) и свойств функции Грина следует, что $A = A(\lambda)$ – непрерывная относительно λ функция на промежутке Λ , $\lambda \in \Lambda$. Пусть $A_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda)$ и $\alpha \leq A_0$. Согласно теореме 1, существует единственное решение $u = u(\lambda)$ уравнения (27) для каждого $\lambda \in \Lambda$, причем это решение – непрерывная функция, $\|u\| \leq r_* = r_*(\lambda)$. Пусть $r_0 = \max_{\lambda \in \Lambda} r_*(\lambda)$. Так как $|J_1(x)| \leq 0,6$ при неотрицательных x , то, используя простейшую оценку интеграла (63), мы получаем, что $|F(\lambda)| \leq 0,3R^2 r_0^3$.

Согласно свойствам функций Макдональда, $K_0(x)$ и $K_1(x)$ – положительны при положительных x . Функция $g(\lambda)$ также положительна относительно λ , $g(\lambda_{1i}) g(\lambda_{2i}) < 0$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, $g(\lambda) = 0$ имеет корень λ_{0i} на интервале Λ_i , $\lambda_{1i} < \lambda_{0i} < \lambda_{2i}$.

Обозначим $M_1 = \min_{1 \leq i \leq m} |g(\lambda_{1i})|$, $M_2 = \min_{1 \leq i \leq m} |g(\lambda_{2i})|$, $M = \min \{M_1, M_2\}$; $M > 0$ не зависит от α .

Если $\alpha \leq \frac{M}{0,3R^2r_0^3}$, то

$$(g(\lambda_{1i}) - \alpha F(\lambda_{1i}))(g(\lambda_{2i}) - \alpha F(\lambda_{2i})) < 0.$$

Так как $g(\lambda) - \alpha F(\lambda)$ – тоже положительная функция, то уравнение $g(\lambda) - \alpha F(\lambda) = 0$ имеет корень λ_i на интервале Λ_i , $\lambda_{1i} < \lambda_i < \lambda_{2i}$. Мы можем выбрать α_0 таким образом, что $\alpha_0 = \min\left\{A_0, \frac{M}{0,3R^2r_0^3}\right\}$. Теорема доказана. #

Из теоремы 3 следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ТЕ-поляризованные волны без затухания в цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной, изотропной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Этот результат обобщает известное соответствующее утверждение для диэлектрических волноводов круглого сечения с заполнением линейной средой (при $\alpha = 0$).

§5 Численный метод

Для численного решения задачи предложим метод отыскания приближенных решений. На практике, как правило, интересуются постоянными распространения волноведущей структуры, т.е. такими (собственными) значениями γ (или, соответственно, λ), при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи P . Ответ на вопрос о существовании и локализации собственных значений γ дает теорема 3. Рассмотрим метод приближенного определения таких γ .

Пусть собственные значения γ ищутся на отрезке $[A_1, A_2]$ (выбор которого может быть сделан с помощью результатов теоремы 3 или исходя из практических соображений). Введем на этом отрезке сетку с узлами $\gamma^{(j)}$, причем $A_1 + j(A_2 - A_1)/N, j = 0, \dots, N$, где N удовлетворяет условию $A_2 - A_1 < N\delta$, если собственное значение γ требуется найти с точностью δ . Вычисляем значения функции Φ в узлах $\gamma^{(j)}$, причем при каждом $\gamma^{(j)}$ решаем интегральное уравнение (36) с помощью итерационного алгоритма (57) с требуемой точностью. Далее определяем перемену знака в последовательности чисел $\Phi(\gamma^{(j)})$. Если $\Phi(\gamma^{(j)})\Phi(\gamma^{(j+1)}) < 0$, то приближенно полагаем $\gamma = (\gamma^{(j)} + \gamma^{(j+1)})/2$.

Раздел 2. Задача о распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, заполненном нелинейной средой

Изучение задач распространения электромагнитных волн в нелинейных средах актуально в связи с тем, что эти явления находят широкое применение в физике плазмы, в современной микроэлектронике, в оптике, в лазерной технике. К таким задачам относится распространение волн в волноведущих структурах и, в частности, в диэлектрическом слое. Математические модели для таких задач и некоторые результаты представлены в работах [10, 14, 17, 18]. Эти модели приводят к краевым задачам на собственные значения для систем дифференциальных уравнений, в которые спектральный параметр входит нелинейным образом. Изучение таких задач представляет большие трудности в связи с тем, что не удается применить известные методы исследования спектральных задач.

Необходимо отметить, что подобные задачи представляют собой именно краевые задачи на собственные значения. Это связано с тем, что главный интерес представляет нахождение тех значений спектрального параметра (по сути, собственных чисел), при которых волна в указанной структуре распространяется. Таким образом, в таких задачах необходимо акцентировать внимание на разыскании дисперсионных уравнений, а не на поисках решений самих дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемое явление. С математической точки зрения дисперсионное уравнение является уравнением относительно спектрального параметра, анализ которого позволяет делать заключение о существовании решений краевой задачи на собственные значения.

Наиболее изучены явления распространения ТЕ-поляризованных электромагнитных волн. Результаты, связанные с распространением ТЕ-поляризованных волн в нелинейном диэлектрическом слое, представлены в работах Н.-В. Шурманн, В. С. Серова и Ю. В. Шестопалова [33–35, 37]. В работах [14, 17] изложены результаты по распространению ТМ-поляризованных волн в нелинейном диэлектрическом полубесконечном слое. В работе [18] получен первый интеграл исследуемой в настоящем разделе системы дифференциальных уравнений, описывающий закон сохранения. Однако полного аналитического решения задачи распространения ТМ-поляризованных волн в нелинейном диэлектрическом слое не было получено. Не было выписано дисперсионное уравнение для постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн.

Впервые уравнения, описывающие распространение волн в нелинейной среде, с нелинейностью, выраженной законом Керра, были выведены в 1971–1972 гг. в пионерских работах П. Н. Елеонского и В. П. Силина (см., например, [10]).

Результаты раздела опубликованы в работах [64–68, 179].

§1 Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой с нелинейностью типа Керра, расположенный между двумя полубесконечными полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 \geq \epsilon_0$ и $\epsilon_3 \geq \epsilon_0$ соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$; где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Электрическое поле гармонически зависит от времени t :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \epsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_+(x, y, z) + i\mathbf{E}_-(x, y, z),$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_+(x, y, z) + i\mathbf{H}_-(x, y, z)$$

есть комплексные амплитуды.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается законом Керра $\epsilon = \epsilon_2 + a|E|^2$, где a и $\epsilon_2 > \max(\epsilon_1, \epsilon_3)$ – положительные константы. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве. Временной множитель везде ниже опущен.

Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяет уравнениям Максвелла (1), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Рассмотрим ТМ-поляризованные волны $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$, $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$. В результате система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y; \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\epsilon E_x; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega\epsilon E_z. \end{cases} \quad (2)$$

Из первого и третьего уравнений системы (2) следует, что $E_z = E_z(x, z)$ и $E_x = E_x(x, z)$ не зависят от y . Поскольку H_y выражается через E_x и E_z , то H_y также не зависит от y .

Обозначим $\frac{\partial}{\partial x} \equiv (\dots)'$ и, предполагая, что компоненты поля гармонически зависят от z , $H_y = H_y(x, z) = H_y(x)e^{i\gamma z}$, $E_x = E_x(x, z) = E_x(x)e^{i\gamma z}$, $E_z = E_z(x, z) = E_z(x)e^{i\gamma z}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} i\gamma E_x(x) - E'_z(x) = i\omega\mu H_y(x); \\ H'_y(x) = -i\omega\epsilon E_z(x); \\ i\gamma H_y(x) = i\omega\epsilon E_x(x), \end{cases} \quad (3)$$

из которой следует, что

$$H_y(x) = \frac{1}{i\omega\mu} (i\gamma E_x(x) - E'_z(x)), \quad (4)$$

здесь γ – неизвестный спектральный параметр – постоянная распространения электромагнитной волны.

Дифференцируя выражение (4) и используя второе и третье уравнения системы (3), получим

$$\begin{cases} \gamma(iE_x(x))' - E''_z(x) = \omega^2\epsilon\mu E_z(x); \\ \gamma^2(iE_x(x)) - \gamma E'_z(x) = \omega^2\epsilon\mu(iE_x(x)). \end{cases} \quad (5)$$

Введем обозначения $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$ с $\mu = \mu_0$ и выполним нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3$), $\tilde{a} = \frac{a}{\varepsilon_0}$. Переобозначаем $E_z \equiv Z(\tilde{x})$, $iE_x \equiv X(\tilde{x})$ и, опуская значок тильды, систему (5) приведем к виду

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \varepsilon Z; \\ -\gamma Z' + \gamma^2 X = \varepsilon X. \end{cases} \quad (6)$$

Будем искать действительные решения $X(x)$, $Z(x)$ для системы (6), полагая γ действительным (так что $|E|^2$ не зависит от z), где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, x < 0; \\ \varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2), 0 < x < h; \\ \varepsilon_3, x > h. \end{cases} \quad (7)$$

Также будем полагать, что функции $X(x)$, $Z(x)$ дифференцируемы в слое так, что

$$X(x) \in C(-\infty; 0] \cap C[0; h] \cap [h; +\infty) \cap C^1(-\infty; 0) \cap C^1(0; h) \cap C^1(h; +\infty)$$

и

$$Z(x) \in C(-\infty; +\infty) \cap C^2(-\infty; 0) \cap C^2(0; h) \cap C^2(h; +\infty).$$

Такие условия гладкости следуют из условий непрерывности касательных составляющих поля на границах раздела сред.

Будем искать такие γ , что $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$.

§2 Решение системы дифференциальных уравнений

Для $\varepsilon = \varepsilon_1$ в полупространстве $x < 0$ получаем общее решение:

$$\begin{cases} X(x) = A \exp\left(x \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right), \\ Z(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\gamma} A \exp\left(x \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right), \end{cases} \quad (8)$$

где принято во внимание условие на бесконечности.

Для $\varepsilon = \varepsilon_3$ в полупространстве $x > h$ имеем

$$\begin{cases} X(x) = B \exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right), \\ Z(x) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\gamma} B \exp\left(-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\right), \end{cases} \quad (9)$$

в соответствии с условием на бесконечности. В решениях (8) и (9) константы A и B будут определяться граничными условиями.

Внутри слоя $0 < x < h$ система (6) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{d^2 Z}{dx^2} + \gamma \frac{dX}{dx} = (\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))Z; \\ -\frac{dZ}{dx} + \gamma X = \frac{1}{\gamma}(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))X. \end{cases} \quad (10)$$

Систему (10) можно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{2a(\varepsilon_2 - \gamma^2 + a(X^2 + Z^2))X^2 + \gamma^2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))}{\gamma(\varepsilon_2 + 3aX^2 + aZ^2)}Z; \\ \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{\gamma}(\varepsilon_2 - \gamma^2 + a(X^2 + Z^2))X. \end{cases} \quad (11)$$

Из системы (11) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-(\varepsilon_2 + 3aX^2 + aZ^2) \frac{dX}{dZ} = 2aXZ + \gamma^2 \frac{\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)}{\varepsilon_2 - \gamma^2 + a(X^2 + Z^2)} \frac{Z}{X}. \quad (12)$$

Уравнение (12) является уравнением в полных дифференциалах, его решение имеет вид

$$aZ^2 + \varepsilon_2 = \frac{\gamma^6 C_1 + 3\gamma^2 (\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))^2 - 2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))^3}{2(\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))(2\gamma^2 - (\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2)))}. \quad (13)$$

Введем новые переменные:

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon_2 + a((X(x))^2 + (Z(x))^2)}{\gamma^2}, \quad \eta(x) = \gamma \frac{X(x)}{Z(x)} \tau(x). \quad (14)$$

Обозначим $\tau_0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2}$. Тогда $X^2 = \frac{\gamma^2}{a} \frac{\eta^2(\tau - \tau_0)}{\eta^2 + \gamma^2 \tau^2}$, $Z^2 = \frac{\gamma^4}{a} \frac{\tau^2(\tau - \tau_0)}{\eta^2 + \gamma^2 \tau^2}$.

Система (11) и уравнение (13) в этих переменных примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 2\gamma^2 \frac{\tau^2 \eta (\tau - \tau_0)(2 - \tau)}{\tau (\eta^2 + \gamma^2 \tau^2) + 2\eta^2 (\tau - \tau_0)}, \\ \frac{d\eta}{dx} = \frac{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}{\tau}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\eta^2 = \frac{\gamma^2 \tau^2 (\tau^2 - C_1)}{C_1 + 3\tau^2 - 2\tau^3 - 2\tau(2 - \tau)\tau_0}. \quad (16)$$

Уравнение (16) есть алгебраическое уравнение четвертой степени относительно τ . Его решение $\tau = \tau(\eta)$ может быть выписано явно по формулам Кардано-Феррари [112].

§3 Границные условия и дисперсионное уравнение

Для того чтобы выписать дисперсионные уравнения для постоянных распространения электромагнитных волн, необходимо найти значения $\eta(0)$, $\eta(h)$.

Из непрерывности касательных составляющих полей **E** и **H**, получаем

$$Z(h) = E_z(h+0) = E_z^{(h)}; \quad Z(0) = E_z(0-0) = E_z^{(0)}; \quad (17)$$

$$\gamma X(h) - Z'(h) = i\omega\mu H_y(h+0) = H_y^{(h)}; \quad \gamma X(0) - Z'(0) = i\omega\mu H_y(0) = H_y^{(0)},$$

где константа $E_z^{(h)}$ считается известной, и тогда

$$H_y^{(h)} = -E_z^{(h)} \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad H_y^{(0)} = E_z^{(0)} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}. \quad (18)$$

В соответствии с (7) в слое

$$-Z'(x) + \gamma X(x) = \frac{1}{\gamma} \left(\varepsilon_2 + a(X^2(x) + Z^2(x)) \right) X(x). \quad (19)$$

Комбинируя (14), (16), (17) и (19), получаем

$$\frac{X^2(h)}{(E_z^{(h)})^2} = \frac{\tau^2(h) - C_1}{C_1 + 3\tau^2(h) - 2\tau^3(h) - 2\tau(h)(2 - \tau(h))\tau_0}; \quad (20)$$

$$\frac{1}{\gamma} \left(\varepsilon_2 + a \left(X^2(h) + \left(E_z^{(h)} \right)^2 \right) \right) X(h) = H_y^{(h)}, \quad (21)$$

где

$$X(h) = \frac{H_y^{(h)}}{\gamma \tau(h)}. \quad (22)$$

Решая уравнение (21) относительно $X(h)$, получаем

$$X^3(h) + \frac{\varepsilon_2 + a \left(E_z^{(h)} \right)^2}{a} X(h) - \frac{\gamma H_y^{(h)}}{a} = 0. \quad (23)$$

Величина $\frac{\varepsilon_2 + a \left(E_z^{(h)} \right)^2}{a}$ неотрицательна, и, следовательно, уравнение (23) имеет, по крайней мере, один действительный корень, который мы и будем рассматривать:

$$X(h) = \left(\frac{\gamma H_y^{(h)}}{2a} + \sqrt{\frac{1}{27} \left(\frac{\varepsilon_2}{a} + \left(E_z^{(h)} \right)^2 \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{a} \right)^2 \left(H_y^{(h)} \right)^2} \right)^{1/3} + \left(\frac{\gamma H_y^{(h)}}{2a} - \sqrt{\frac{1}{27} \left(\frac{\varepsilon_2}{a} + \left(E_z^{(h)} \right)^2 \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{a} \right)^2 \left(H_y^{(h)} \right)^2} \right)^{1/3}.$$

Таким образом, $\tau(h) = \frac{H_y^{(h)}}{\gamma X(h)}$. Используя (18) и (22), найдем

$$X(h) = -\frac{E_z^{(h)}}{\gamma \tau(h)} \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}. \quad (24)$$

Из уравнений (20) и (24) имеем

$$C_1 = \tau^2(h) - \frac{2\varepsilon_3^2 \tau(h) (2 - \tau(h)) (\tau(h) - \tau_0)}{\varepsilon_3^2 + \gamma^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) \tau^2(h)}. \quad (25)$$

Если $C_1 > 0$, то уравнение (16), рассматриваемое как уравнение относительно $\tau(h)$, будет иметь положительный корень. Легко показать, что C_1 строго больше нуля. В самом деле, из выражения (25) видно, что при $\tau(h) > 2$ $C_1 > 0$, т.к. всегда $\tau(h) \geq \tau_0 > 1$ и $(\gamma^2 - \varepsilon_3) > 0$. Рассмотрим случай $\tau(h) \in [\tau_0, 2]$. Приводя к общему

знаменателю выражение (25) и, где необходимо, заменяя $\tau(h) = \tau_0 + \alpha$, где $0 < \alpha < 1$, приходим к выражению

$$C_1 = \tau(h) \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) \tau^3(h) + \varepsilon_3^2 (2\alpha(\tau(h)-1) + \tau_0 - \alpha)}{\varepsilon_3^2 + \gamma^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) \tau^2(h)}$$

с положительной правой частью.

Известно, что составляющие электромагнитного поля $\varepsilon X(x)$ и $Z(x)$ непрерывны на границе раздела сред. Тогда функция $\eta(x)$ также непрерывна на границе раздела сред в точках x таких, что $Z(x) \neq 0$. Тогда, используя (8) и (9), имеем

$$\eta(0) = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} > 0; \quad \eta(h) = -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} < 0. \quad (26)$$

Из положительности правой части второго уравнения системы (15) ясно, что функция $\eta(x)$ монотонно возрастает на интервале $(0; h)$. Учитывая знаки выражений (26), получаем, что функция $\eta(x)$ не может быть дифференцируемой на всем интервале $(0; h)$, а необходимо имеет точку разрыва. Пусть это будет $x^* \in (0; h)$. Из (16) ясно, что x^* таково, что $\tau^* = \tau(x^*)$ является корнем уравнения $C_1 + 3(\tau^*)^2 - 2(\tau^*)^3 - 2\tau^*(2 - \tau^*)\tau_0 = 0$. Причем $\eta(x^* - 0) \rightarrow +\infty$ и $\eta(x^* + 0) \rightarrow -\infty$.

Обозначим

$$f \equiv f(\eta) = \frac{\tau}{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2(\tau - 1)},$$

где $\tau = \tau(\eta)$, выраженное из уравнения (16). В общем случае функция $\eta(x)$ на промежутке $[0, h]$ имеет несколько точек x_0, x_1, \dots, x_N , в которых она обращается в бесконечность, причем

$$\begin{aligned} \eta(x_0 - 0) &= \eta(x_1 - 0) = \dots = \eta(x_N - 0) = +\infty, \\ \eta(x_0 + 0) &= \eta(x_1 + 0) = \dots = \eta(x_N + 0) = -\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Ниже будет доказано, что число таких точек конечно для любого h .

Будем искать решения на каждом отрезке $[0, x_0]$, $[x_0, x_1]$, ..., $[x_N, h]$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\eta(x)}^{\eta(x_0)} f d\eta = x + c_0, \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ & \int_{\eta(x_i)}^{\eta(x)} f d\eta = x + c_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \text{ где } i = \overline{0, N-1}; \\ & \int_{\eta(x_N)}^{\eta(x)} f d\eta = x + c_{N+1}, \quad x_N \leq x \leq h. \end{aligned} \quad (28)$$

Из уравнений (28), учитывая (27), подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1}$, $x = x_N$ в первое, второе и третье уравнения (28), найдем необходимые константы c_1, c_2, \dots, c_{N+1} :

$$\begin{aligned} c_0 &= - \int_{\eta(0)}^{+\infty} f d\eta; \\ c_{i+1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f d\eta - x_{i+1}, \text{ где } i = \overline{0, N-1}; \\ c_{N+1} &= \int_{-\infty}^{\eta(h)} f d\eta - h. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (29) уравнения (28) примут вид

$$\begin{aligned} & \int_{\eta(x)}^{\eta(x_0)} f d\eta = -x + \int_{\eta(0)}^{+\infty} f d\eta, \quad 0 \leq x \leq x_0; \\ & \int_{\eta(x_i)}^{\eta(x)} f d\eta = x + \int_{-\infty}^{+\infty} f d\eta - x_{i+1}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \text{ где } i = \overline{0, N-1}; \\ & \int_{\eta(x_N)}^{\eta(x)} f d\eta = x + \int_{-\infty}^{\eta(h)} f d\eta - h, \quad x_N \leq x \leq h. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначение $\int_{-\infty}^{+\infty} f d\eta = T$. Из формул (30) следует, что $x_{i+1} - x_i = T > 0$, где $i = \overline{0, N-1}$. Отсюда следует, что число точек,

в которых функция $\eta(x)$ обращается в бесконечность, конечно на интервале $(0; h)$. Теперь, полагая в уравнениях (30) x таковым (т.е. подставляя $x = x_0$, $x = x_i$, $x = x_N$ в первое, второе и третье уравнения (30)), чтобы все интегралы слева обратились в нуль, сложим все уравнения (30), получим

$$0 = -x_0 + \int_{\eta(0)}^{+\infty} f d\eta + x_0 + T - x_1 + \dots + x_{N-1} + T - x_N + x_N + \int_{-\infty}^{\eta(h)} f d\eta - h. \quad (31)$$

Из выражения (31) окончательно получаем

$$-\int_{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}}^{\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}} f d\eta + (N+1)T = h, \quad (32)$$

где $N \geq 0$ и является целым числом.

Формула (32) есть дисперсионное уравнение, справедливое для любого h . Надо отметить, что когда $N \neq 0$, то возникает несколько уравнений при различных значениях N . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Все полученные γ будут составлять множество постоянных распространения, на которых и только на которых будут распространяться волны в слое при данном h . На самом деле N будет принимать все целые значения от 0 до $\left[\frac{h}{T} \right]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Также необходимо заметить, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f d\eta$ сходится в силу того,

что функцию f можно мажорировать функцией $\frac{M}{(m-1)\eta^2}$, где $M = \max_{x \in [0, h]} \tau(x)$, а $m = \min_{x \in [0, h]} \tau(x) > 1$. То что функция $\tau(x)$ имеет конечные минимум и максимум, ясно из ограниченности функций $X(x)$ и $Z(x)$.

Если рассматривать первое уравнение системы (15) совместно с первым интегралом, то это уравнение можно проинтегрировать, и это приведет к так называемым гиперэллиптическим интегралам (это один из простых примеров абелевых интегралов). Если расширить область определения независимого переменного x на всю

комплексную плоскость, то можно рассматривать функции, обратные к этим интегралам, которые и будут решениями системы (15). Это гиперэллиптические функции, принадлежащие классу абелевых функций, которые являются мероморфными периодическими функциями. А поскольку функция η выражается через τ алгебраически, то она также является мероморфной периодической функцией. Таким образом, точка разрыва x^* является одним из полюсов функции η . Интеграл, стоящий в уравнении (32), является более общим абелевым интегралом [57, 129].

§4 Краевая задача и теоремы существования

Условия сопряжения для компонент поля \mathbf{E} дают

$$[\varepsilon X]_{x=0} = 0, [\varepsilon X]_{x=h} = 0, [Z]_{x=0} = 0, [Z]_{x=h} = 0. \quad (33)$$

Будем считать, что функции $X(x)$ и $Z(x)$ также удовлетворяют условию

$$X(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ и } Z(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Пусть $D = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ и $F(X(x), Z(x)) = \begin{pmatrix} X(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}$ и $G(F, \gamma) = \begin{pmatrix} G_1(F, \gamma) \\ G_2(F, \gamma) \end{pmatrix}$, где $X(x)$ и $Z(x)$ являются искомыми функциями, а G_1 и G_2 являются правыми частями уравнений системы (11). Число γ является спектральным параметром. Также будем рассматривать вектор-столбец $N(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon X(x) \\ Z(x) \end{pmatrix}$. Перепишем задачу, используя введенные обозначения.

Для полупространства $x < 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $N = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 X \\ Z \end{pmatrix}$ получаем

$$\gamma DF - \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 - \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} F = 0. \quad (35)$$

$$\text{Внутри слоя } 0 < x < h, \varepsilon = \varepsilon_2 + a|\mathbf{E}|^2, N = \begin{pmatrix} (\varepsilon_2 + a(X^2 + Z^2))X \\ Z \end{pmatrix},$$

и система принимает вид

$$L(F, \gamma) \equiv DF - G(F, \gamma) = 0. \quad (36)$$

Для полупространства $x > h$, $\varepsilon = \varepsilon_3$, $N = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 X \\ Z \end{pmatrix}$ получаем

$$\gamma DF - \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 - \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} F = 0. \quad (37)$$

Условия сопряжения (33) приводят к условиям

$$[N(x)]_{x=0} = 0, [N(x)]_{x=h} = 0, \quad (38)$$

где $[f(x)]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, что для вектора обозначает переход к пределу по каждой компоненте вектора.

Сформулируем краевую задачу (задачу сопряжения). Требуется найти ненулевой вектор F и соответствующие собственные значения γ такие, что F удовлетворяет уравнениям (35)–(37) и условиям сопряжения (38). Кроме того, компоненты вектора F удовлетворяют условию (34).

$L(F, \gamma)$ из формулы (36) является нелинейной оператор-функцией нелинейно зависящей от спектрального параметра. Спектральная теория для линейных оператор-функций, нелинейно зависящих от спектрального параметра, разработана в [76]. На данный момент не существует общей спектральной теории нелинейных оператор-функций нелинейно зависящих от спектрального параметра. Поэтому краевые задачи, приводящие к исследованию таких оператор-функций, в большинстве случаев не удается решить известными методами.

Определение 1. Число $\gamma = \gamma_0$, при котором существует ненулевое решение F задачи (35)–(37) при условиях (34) и (38), будем называть собственным значением задачи. Решение F , которое соответствует собственному значению, будем называть собственным вектором задачи, а компоненты $X(x)$ и $Z(x)$ вектора F – собственными функциями.

Определение 1 является неклассическим аналогом известного определения характеристического числа линейной оператор-функции,

нелинейно зависящей от спектрального параметра [76]. Введенное определение 1 является, с одной стороны, распространением классического определения собственного значения на случай нелинейной оператор-функции, нелинейно зависящей от спектрального параметра, с другой стороны, соответствует физической природе задачи.

Теорема 1. *Краевая задача на собственные значения (35)–(37) с условиями (34) и (38) имеет решение – собственное значение, тогда и только тогда, когда это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (32).*

Доказательство. *Достаточность.* Очевидно, что, найдя решение γ дисперсионного уравнения (32), мы сможем найти функции $\tau(x)$ и $\eta(x)$ из системы (15) и первого интеграла (16). Зная функции $\tau(x)$ и $\eta(x)$ и пользуясь формулами (14), найдем

$$X(x) = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{a}} \eta \sqrt{\frac{\tau - \tau_0}{\eta^2 + \gamma^2 \tau^2}} \text{ и } Z(x) = \pm \frac{\gamma^2}{\sqrt{a}} \tau \sqrt{\frac{\tau - \tau_0}{\eta^2 + \gamma^2 \tau^2}}. \quad (39)$$

Вопрос о выборе знака является существенным, и поэтому остановимся на нем подробнее. Нам известно поведение функции $\eta = \gamma \tau \frac{X}{Z}$: функция η является монотонно возрастающей, если $x = x^*$ таково, что $\eta(x^*) = 0$, то $\eta(x^* - 0) < 0$, $\eta(x^* + 0) > 0$, и если $x = x^{**}$ таково, что $\eta(x^{**}) = \pm\infty$, то $\eta(x^{**} - 0) > 0$ и $\eta(x^{**} + 0) < 0$.

Других точек перемен знака у функции η нет. Из краевых условий следует, что $Z(h) = E_z^{(h)} (> 0)$. Учтем, что если $\eta > 0$, то функции X и Z имеют одинаковые знаки, а если $\eta < 0$, то X и Z имеют разные знаки и, помня о том, что X и Z – гладкие функции, выбираем соответствующие знаки в выражениях (39).

Необходимость. Из способа получения дисперсионного уравнения (32) из системы (15) следует, что собственное значение краевой задачи является решением дисперсионного уравнения. #

Также необходимо заметить, что собственные функции, отвечающие собственному значению γ_0 , легко могут быть найдены численно из системы (11), например, методом Рунге-Кутты.

На основе полученных результатов сформулируем теоремы о существовании и локализации собственных значений рассматриваемой краевой задачи. Пусть функция $J \equiv J(a, \gamma, N)$ обозначает

правую часть дисперсионного уравнения (32). Ясно, что для любого целого неотрицательного конечного N

$$\inf_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, N) > 0, \quad \sup_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, N) < \infty,$$

более того, из самого вида дисперсионного уравнения следует, что при уменьшении N значения нижней и верхней грани уменьшаются, а при увеличении N – увеличиваются.

Теорема 2. Пусть

$$h_1^{(0)} = \inf_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, 0), \quad h_2^{(0)} = \sup_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, 0).$$

Тогда для любого $h \in (h_1^{(0)}, h_2^{(0)})$ существует по крайней мере одно собственное значение задачи (35)–(37) при условиях (34) и (38).

Теорема 3. Пусть

$$h_1^{(k)} = \inf_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k), \quad h_2^{(k)} = \sup_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k),$$

и пусть $h \in (h_1^{(k)}, h_2^{(k)})$ для всех $k = \overline{0, N}$.

Тогда существует по крайней мере $N+1$ собственных значений задачи (35)–(37) при условиях (34) и (38).

Теорема 4. Пусть

$$h_1^{(k)} = \inf_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k), \quad h_2^{(k)} = \sup_{\gamma^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)} J(a, \gamma, k),$$

и h таково, что найдутся такие i и j , что $h_2^{(i)} < h$, а $h_2^{(i+1)} > h$ и $h_1^{(j)} < h$, а $h_1^{(j+1)} > h$.

Тогда существует по крайней мере $j-i$ собственных значений задачи (35)–(37) при условиях (34) и (38).

Теорема 4 требует некоторых пояснений. Поскольку нижняя и верхняя грани исследуемой функции конечны, то ясно, что если для какого-то j нижняя грань больше h , то для больших номеров j она тем более больше h , и дисперсионное уравнение не имеет решений. Также если для какого-то i верхняя грань меньше h , то для всех меньших номеров i она тем более меньше h , таким образом, и в этом случае дисперсионное уравнение не имеет решений.

§5 Предельный переход к случаю линейной среды в слое

Рассмотрим предельный переход при $a \rightarrow 0$ к случаю линейной среды в слое. Дисперсионное соотношение для линейного случая выглядит следующим образом [47]:

$$\operatorname{tg}\left(h\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}\right) = \frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} + \varepsilon_3\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1})}{\varepsilon_1\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \gamma^2) - \varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}. \quad (40)$$

Рассмотрим функции

$$f = \frac{\tau}{\gamma^2\tau^2 + \eta^2(\tau-1)}, \quad f_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} \frac{1}{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2}.$$

Функция f_1 получилась из f формальным предельным переходом при $a \rightarrow 0$ по переменной τ . Так как мы ищем действительные решения $X(x)$ и $Z(x)$, знаменатель функции f_1 не может обращаться в нуль. Более того, функция f при $a \rightarrow 0$ равномерно на $x \in [0, h]$ стремится к функции f_1 . Используя результаты классического анализа, можно показать, что при этом условии с учетом непрерывности функции f можно перейти к пределу при $a \rightarrow 0$ под знаком интеграла в (32):

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} \left(- \int_{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} \frac{1}{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2} d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2} d\eta \right) = h. \quad (41)$$

Интегралы в (41) вычисляются аналитически. Вычислив эти интегралы, получим

$$h\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2} = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2 - \gamma^2}(\varepsilon_1\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} + \varepsilon_3\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1})}{\varepsilon_1\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \gamma^2) - \varepsilon_2^2\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} + (N+1)\pi. \quad (42)$$

Взяв тангенс от выражения (42), получим (40).

Результаты этого параграфа показывают, что при переходе к пределу при $a \rightarrow 0$ мы получаем регулярный случай. В пределе дисперсионное уравнение (32) для случая нелинейной среды в слое переходит в дисперсионное уравнение (40) для случая линейной среды в слое. Уравнение (40) является классическим в электродинамике и хорошо известно.

§6 Первое приближение для собственных значений задачи

Пусть

$$F(a, \gamma) = h, \quad (43)$$

где $F(a, \gamma)$ – левая часть уравнения (32). Выражение (43) определяет неявную функцию $\gamma \equiv \gamma(a)$. Предполагая, что эта функция является дифференцируемой в окрестности точки $a = 0$, далее мы покажем, что это действительно так. Разложим ее в ряд Тейлора:

$$\gamma \equiv \gamma(a) = \gamma(0) + \frac{d\gamma(a)}{da} \Big|_{a=0} a + O(a^2) = \gamma_0 + \gamma_1 a + O(a^2), \quad (44)$$

где γ_0 является решением уравнения (40).

Находим полный дифференциал выражения (43) и, выражая искомую производную, получаем

$$\frac{d\gamma(a)}{da} = -\frac{\frac{\partial F(a, \gamma)}{\partial a}}{\frac{\partial F(a, \gamma)}{\partial \gamma}}. \quad (45)$$

Воспользовавшись (32), найдем

$$\frac{\partial F(a, \gamma)}{\partial a} = - \int_{\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} \frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial a} d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial a} d\eta \quad (46)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(a, \gamma)}{\partial \gamma} &= G\left(a, \gamma, \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}\right) \frac{\gamma \varepsilon_1}{\sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_1)^3}} + \\ &+ G\left(a, \gamma, -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}\right) \frac{\gamma \varepsilon_3}{\sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_3)^3}} - \\ &- \int_{\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} \frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial \gamma} d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial \gamma} d\eta, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$G(a, \gamma, \eta) = \frac{\tau}{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}. \quad (48)$$

В формуле (48) τ является функцией η , которая определяется из уравнения (16).

Можно показать, что функции $\frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial a}$ и $\frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial \gamma}$ при $a \rightarrow 0$ равномерно на $x \in [0, h]$ стремятся соответственно к функциям $\left. \frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial a} \right|_{a=0} = G_1(\gamma, \eta)$ и $\left. \frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial \gamma} \right|_{a=0} = G_2(\gamma, \eta)$. Предполагая, что функции $\frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial a}$ и $\frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial \gamma}$ непрерывны по η при любом фиксированном a , используя результаты классического анализа, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Тогда формулы (46) и (47) примут вид

$$\left. \frac{\partial F(a, \gamma)}{\partial a} \right|_{a=0} = - \int_{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} G_1(\gamma, \eta) d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\gamma, \eta) d\eta; \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(a, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{a=0} &= G\left(0, \gamma, \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}\right) \frac{\gamma \varepsilon_1}{\sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_1)^3}} + \\ &+ G\left(0, \gamma, -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}\right) \frac{\gamma \varepsilon_3}{\sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_3)^3}} - \\ &- \int_{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} G_2(\gamma, \eta) d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\gamma, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (50)$$

и

$$G(0, \gamma, \eta) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} \frac{1}{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2}. \quad (51)$$

Используя (48), найдем

$$\frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial a} = -\frac{\partial \tau}{\partial a} \frac{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2}{(\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1))^2}; \quad (52)$$

$$\frac{\partial G(a, \gamma, \eta)}{\partial \gamma} = -\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \frac{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2}{(\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1))^2} - \frac{2\gamma \tau^3}{(\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1))^2}. \quad (53)$$

Из формулы (16), переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial a} \right|_{a=0} = \frac{(\gamma^2 \tau_0^2 + \eta^2)}{2\tau_0 (\gamma^2 \tau_0^2 + \eta^2 (\tau_0 - 1))} \left(\left. \frac{\partial C_1}{\partial a} \right|_{a=0} \right). \quad (54)$$

Воспользовавшись (25) и переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем

$$\left. \frac{\partial C_1}{\partial a} \right|_{a=0} = 2 \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} \frac{\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)}{\gamma^2 \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3)} \left(\left. \frac{\partial \tau(h)}{\partial a} \right|_{a=0} \right). \quad (55)$$

Используя (22), (23) и переходя к пределу при $a \rightarrow 0$, получаем

$$\left. \tau(h) \right|_{a=0} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2}, \left. \frac{\partial \tau(h)}{\partial a} \right|_{a=0} = \frac{\gamma^2 \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3)}{\gamma^2 \varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3)} \left(E_z^{(h)} \right)^2. \quad (56)$$

Имея в виду (56), найдем окончательное выражение для (55):

$$\left. \frac{\partial C_1}{\partial a} \right|_{a=0} = 2 \frac{\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)}{\gamma^4 \varepsilon_2 (\gamma^2 - \varepsilon_3)} \left(E_z^{(h)} \right)^2. \quad (57)$$

Из выражения (25), используя (56), ясно, что при $a \rightarrow 0$

$$\left. C_1 \right|_{a=0} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} \right)^2. \quad (58)$$

Далее, из (16) при $a \rightarrow 0$ находим

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \right|_{a=0} = -2 \frac{\varepsilon_2}{\gamma^3}. \quad (59)$$

При помощи формулы (51) вычислим значения, используемые в (50):

$$G \left(0, \gamma, \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} \right) \frac{\gamma \varepsilon_1}{\sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_1)^3}} = \frac{\gamma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} \left(\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2) \right)},$$

$$G\left(0, \gamma, -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}\right) \frac{\gamma \varepsilon_3}{\sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_3)^3}} = \frac{\gamma \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))}. \quad (60)$$

Теперь мы можем выписать явные выражения для функций $G_1(\gamma, \eta)$ и $G_2(\gamma, \eta)$ из формул (49) и (50), используя (52), (54) и (57), получим

$$G_1(\gamma, \eta) = -k \frac{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\gamma^2} + \eta^2\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2\right)^3}, \quad (61)$$

где $k = \gamma^4 \frac{\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)}{\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) (\varepsilon_2 - \gamma^2)^3} (E_z^{(h)})^2$, и, используя (53) и (59),

получаем

$$G_2(\gamma, \eta) = \frac{2\gamma \varepsilon_2}{(\varepsilon_2 - \gamma^2)^2} \frac{\eta^2}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2\right)^2}. \quad (62)$$

Воспользовавшись выражениями (61) и (62), мы можем выписать искомую производную (45) в такой форме:

$$\gamma_1 \equiv \frac{d\gamma(a)}{da} \Big|_{a=0} = \frac{\gamma^3 (\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)) (E_z^{(h)})^2 P(\gamma)}{2\varepsilon_2^3 (\gamma^2 - \varepsilon_3) (\varepsilon_2 - \gamma^2) Q(\gamma)}, \quad (63)$$

где

$$P = - \int_{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} \frac{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\gamma^2} + \eta^2\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2\right)^3} d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\gamma^2} + \eta^2\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2\right)^3} d\eta \quad (64)$$

и

$$Q = - \int_{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}}^{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}} \frac{\eta^2}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2\right)^2} d\eta + (N+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2}{\left(\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 - \gamma^2} + \eta^2\right)^2} d\eta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\varepsilon_2 - \gamma^2)^2}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} (\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))} + \\
& + \frac{(\varepsilon_2 - \gamma^2)^2}{2} \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))}. \tag{65}
\end{aligned}$$

Из формул (63)–(65) видно, что при соблюдении условий накладенных на ε_1 , ε_2 , ε_3 , γ и a (см. §1), производная (45) всегда неотрицательна.

Интегралы в (64) и (65) вычисляются элементарно. Найдя необходимые интегралы и используя, где необходимо (42), получим искомую производную в такой форме:

$$\gamma_1 \equiv \left. \frac{d\gamma(a)}{da} \right|_{a=0} = \frac{(\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)) (E_z^{(h)})^2 P_1}{8\gamma\varepsilon_2^3 (\varepsilon_2 - \gamma^2) (\gamma^2 - \varepsilon_3)} \frac{P_1}{Q_1}, \tag{66}$$

где

$$\begin{aligned}
P_1 &= 2\varepsilon_2^2 (\varepsilon_2 - 2\gamma^2) \times \\
&\times \left(-\frac{\varepsilon_1 \sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_1)^3}}{(\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))^2} - \frac{\varepsilon_3 \sqrt{(\gamma^2 - \varepsilon_3)^3}}{(\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))^2} \right) + \\
&+ (3\varepsilon_2 + 2\gamma^2) (\varepsilon_2 - 2\gamma^2) \times \\
&\times \left(-\frac{\varepsilon_1 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}{\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)} - \frac{\varepsilon_3 \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}{\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2)} \right) + \\
&+ \frac{3\varepsilon_2^2 - 4\gamma^2\varepsilon_2 + 4\gamma^4}{\varepsilon_2} h \tag{67}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} (\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))} + \\
&+ \frac{\varepsilon_3 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2))} + \frac{h}{\varepsilon_2}. \tag{68}
\end{aligned}$$

Используя (66)–(68), запишем формулу (45) в точке $\gamma = \gamma_0$, $a = 0$:

$$\gamma_1 \equiv \left. \frac{d\gamma(a)}{da} \right|_{a=0} = \frac{\left(\varepsilon_2^2 (\gamma^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 (\varepsilon_2 - \gamma^2) \right) \left(E_z^{(h)} \right)^2}{8\gamma\varepsilon_2^3 (\varepsilon_2 - \gamma^2) (\gamma^2 - \varepsilon_3)} \frac{P_1(\gamma_0)}{Q_1(\gamma_0)}. \quad (69)$$

Теперь, используя (69), можно найти γ_1 и, таким образом, получить разложение (44). Величина γ_1 представляет собой поправку в первом приближении к значению γ_0 .

Рассмотрим функцию $F(a, \gamma) - h = 0$ в окрестности точки $a = 0$, $\gamma = \gamma_0$. Из формул (16), (24), (25), (32) ясно, что указанная функция непрерывна в этой окрестности, поскольку функция $\tau = \tau(\eta)$ является решением алгебраического уравнения (16), коэффициенты которого непрерывно зависят от a и γ . Как видно из формул (46) и (47), в окрестности этой точки рассматриваемая функция имеет частные производные и по a , и по γ . Из формулы (68) ясно, что частная производная по γ не обращается в нуль в точке $a = 0$, $\gamma = \gamma_0$. Замечая, что $F(a, \gamma) - F(0, \gamma_0) = 0$ в указанной точке, получаем, что уравнение $F(a, \gamma) - h = 0$ однозначно разрешимо относительно γ в некоторой окрестности точки $a = 0$, $\gamma = \gamma_0$, и $\gamma \equiv \gamma(a)$. Из формулы (67) мы видим, что частная производная по a рассматриваемой функции также непрерывна в точке $a = 0$, $\gamma = \gamma_0$. Из этого следует, что функция $\gamma \equiv \gamma(a)$ имеет производную в точке $a = 0$ и для нее справедлива формула (45) [116, с. 30–31]. Таким образом, мы полностью обосновали возможность получения первого приближения. Необходимо помнить, что все выводы сделаны с учетом ограничений, наложенных на ε_1 , ε_2 , ε_3 , a и γ (см. §1).

Также необходимо отметить, что рассмотренный в этом разделе метод отыскания дисперсионного уравнения применим и к более общей задаче. А именно, к задаче распространения ТМ-волны в нелинейном анизотропном слое с керровской нелинейностью. Постановка задачи отличается только тем, что диэлектрическая проницаемость в слое в этом случае описывается диагональным тензором вида

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \text{ где } \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{12} + b|E_x|^2 + a|E_z|^2, \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{21} + a|E_x|^2 + b|E_z|^2,$$

$a, b, \varepsilon_{12} > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ и $\varepsilon_{21} > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Здесь после записи системы

уравнений в терминах функций $X(x)$ и $Z(x)$ в качестве переменных $\tau(x)$ и $\eta(x)$ следует взять переменные $\tau(x) = \frac{\varepsilon_{12} + bX^2 + aZ^2}{\gamma^2}$ и $\eta(x) = \gamma \frac{X}{Z} \tau(x)$, где $X = X(x)$ и $Z = Z(x)$.

Анизотропный случай, когда $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_2$, подробно разобран в статье [67].

Список литературы

1. **Adams R.** Sobolev spaces. – New York : Academic Press, 1975.
2. **Akhmediev N. N., Ankiewicz A.** Solitons, nonlinear pulses and beams. – London : Chapman and Hall, 1997.
3. **Chernokozhin E. V., Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G.** Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. – Utrecht, the Netherlands, VSPublisher, 2000.
4. Computational Electromagnetics: Frequency-Domain Method of Moments / ed. by E. K. Miller, L. Medgyesi-Mitschand, E. H. Newman; IEEE Press. – New York, 1992.
5. **Costabel M.** A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains // Math. Meth. Appl. Sci. – 1990. – V. 12. – P. 365–368.
6. **Costabel M.** Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – V. 19. – № 3. – P. 613–626.
7. **Costabel M., Stephan E.** Strongly elliptic boundary integral equations for electromagnetic transmission problems // Proc. Roy Soc. Edinburg. – 1988. – V. 109A. – P. 271–296.
8. **Costabel M., Stephan E. P.** A Direct boundary integral equation method for transmission problems // J. Math. Analys. and Appl. – 1985. – V. 106. – P. 367–413.
9. **Cwik T.** Coupling finite element and integral equation solutions using decoupled boundary meshes // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1992. – V. 40. – № 12. – P. 1496–1504.
10. **Eleonskii P. N., Oganes'yants L. G., Silin V. P.** Cylindrical Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JEPT. – 1972. – V. 35. – № 1. – P. 44–47.
11. **Harrington R. F.** Field Computation by Moment Methods. – New York : Macmillian Co., 1968.
12. **Ilyinsky A. S., Smirnov Yu. G.** Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens // VSP, Utrecht, the Netherlands. – 1998.
13. **Ivakhnenko V. I., Smirnov Yu. G., Tyrtysnikov E. E.** The Electric Field Integral Equation: Theory and Algorithms // Approximations and Numerical Methods for the Solution of Maxwell Equations, The Institute of Mathematics and its Applications, Conference Series, New Series Number 65, Clarendon Press. – Oxford, 1998. – P. 251–263.
14. **Joseph R. I., Christodoulides D. N.** Exact field decomposition for TM waves in nonlinear media // Optics Letters. – 1987. – V. 12. – № 10. – P. 826–828.

15. **Kobayashi K., Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 2009. – (принято к печати).
16. **Kress R.** Linear Integral Equations // Applied Mathematical sciences. – V. 82. Springer-Verlag. – New York, 1989.
17. **Leung K. M.** P-polarized nonlinear surface polaritons in materials with intensity-dependent dielectric functions // Physical Review B. – 1985. – V. 32. – № 8. – P. 5093–5101.
18. **Leung K. M., Lin R. L.** Scattering of transverse-magnetic waves with a nonlinear film: formal field solutions in quadratures // Physical Review B. – 1991. – V. 44. – № 10. – P. 5007–5012.
19. **Maué A. W.** Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation // Zeitschrift fur Physik. – 1949. – V. 12. – P. 601–618.
20. **Miller E. K., Poggio A. J.** Electromagnetic Scattering / ed. by P.L.E. Uslenghi. – New York : Academic Press, 1978. – P. 315–358
21. **Mittra R., ed.** Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics. – New York : Springer Verlag, 1975.
22. **Moore J., Pizer R.** Moment Methods in Electromagnetics: Techniques and Applications. – New York : John Wiley & Sons, 1984.
23. **Morgenrother K., Werner P.** On the Instability of Resonances in Parallelplane Waveguides // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 1989. – V. 11. – P. 279–315.
24. **Muller Cl.** Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. Springer-Verlag. – New York, 1969.
25. **Nedelec J.-C.** Mixed finite elements // R^3 Numer. Math. – 1980. – V. 35. – P. 315–341.
26. **Paivarinta L., Rempel S.** A deconvolution problem with Kernel $1/|x|$ on the plane // Appl. Anal. – 1987. – V. 26. – P. 105–128.
27. **Paivarinta L., Rempel S.** Corner singularities of solutions to $\Delta^{\pm 1/2} u = f$ in two dimensions // Asymptotic Analysis. – 1992. – V. 5. – P. 429–460.
28. **Ramm F. G.** Scattering by Obstacles. – Dordrecht. D. Reidel Publ. Comp., 1986.
29. **Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W.** Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape // IEEE Trans. Antennas Propagation. – 1982. – V. AP-30. – № 3. – P. 409–418.
30. **Raviart P. A., Thomas J.-M.** A mixed finite ‘element method for 2nd order elliptic problems // Lect. Notes in Math. – V. 606. – Berlin and New York : Springer, 1977. – P. 292–315.

31. **Salazar-Palma M., Garcia-Castillio L. E., Sarkar T. K.** Radiation / Scattering from 3D Conducting / Dielectric structures utilizing the finite element method // Proc. Progress Electromagnetics Res. Symp. – 1998. – July 13–17. Nantes, France. – P. 467.
32. **Schuman H. K., Warren D. E.** Aperture Coupling in Bodies of Revolution // IEEE Trans. Antennas Propagation. – 1978. – V. AP-26. – № 6. – P. 778–783.
33. **Schurmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V.** Reflection and transmission of a plane TE-wave at a lossless nonlinear dielectric film // Physica D. – 2001. – V. 158. – P. 197–215.
34. **Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V.** Solutions to the Helmholtz equation for TE-guided waves in a three-layer structure with Kerr-type nonlinearity // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V. 35. – P. 10789–10801.
35. **Schürmann H. W., Serov V. S. and Shestopalov Yu. V.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58. – P. 1040–1050.
36. **Schurmann H.-W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V.** Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Physical Review E. – 2005. – V. 71. – № 1. – P. 016614-1–016614-10.
37. **Serov V. S., Shestopalov Yu. V., Schürmann H. W.** Propagation of TE waves through a layer having permittivity depending on the transverse coordinate and lying between two half-infinite nonlinear media // Dokl. Maths. – 1999. – V. 60. – P. 742–744.
38. **Serov V. S., Shestopalov Yu. V., Schürmann H. W.** Existence of eigenwaves and solitary waves in lossy linear and lossless nonlinear layered waveguides // Dokl. Maths. – 1996. – V. 53. – P. 98 –100.
39. **Shestopalov Yu. V., Podlipenko Yu., Smirnov Yu. G., Anderson D., Lisak M.** Mathematical Modelling of Waves Scattering in Plane Waveguides with Cone-Type Discontinuities // Preprint: Institute for Electromagnetic Field Theory and Plasma Physics. – Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 1993.
40. **Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G.** The Diffraction in a Class of Unbounded Domains Connected Through a Hole // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2003. – V. 26. – P. 1363–1389.
41. **Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. V.** Integral Equations (A compendium). – Sweden, Karlstad University Press, 2002.
42. **Smirnov Yu. G.** Inverse Boundary Value Problem for Determination of Permittivity of Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation // IEEJ Transactions A (Fundamentals and Materials). – 2009. – (принято к печати).

43. **Smirnov Yu. G.** Method of Pseudodifferential Equations for Problems of Electromagnetic Wave Diffraction by Thin Screens // Journal of Communications, Technology and Electronics. – 2000. – V. 45. – Suppl. 2, December. – P. 212–228.
44. **Smirnov Yu. G.** Method of Pseudodifferential Equations for Problems of Electromagnetic Wave Diffraction by Screens and Bodies // Известия Высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 6. – Р. 4–29. – (Естественные науки).
45. **Smirnov Yu. G.** Method of Singular Integral Operator-Functions for the Transmission Line Problem // Electromagnetics. – 1993. – V. 14. – № 2. – P. 145–156.
46. **Smirnov Yu. G., Schuermann H. W., Shestopalov Yu. V.** Integral Equation Approach for the Propagation of TE-Waves in a Nonlinear Dielectric Cylindrical Waveguide // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2004. – P. 11. – № 2. – P. 256–268.
47. **Snyder A., Love J.** Optical Waveguide Theory. Chapmen and Hall. – London, 1983.
48. **Sommerfeld A.** Mathematische Theorie der Diffraction // Math. Ann. – 1896. – V. 47. – P. 317–374.
49. **Stakgold I.** Green's Functions and Boundary Value Problems. – New York : Wiley, 1979.
50. **Stephan E., Wendland W.L.** An Augmented Galerkin Procedure for the Boundary Integral Method Applied to Two-dimensional Screen and Crack Problems // Applicable Analysis. – 1984. – V. 18. – P. 105–128.
51. **Stephan E. P.** Boundary Integral Equations for Screen Problem in R^3 // Integral Equations and Operator Theory. – 1987. – V. 10. – P. 236–257.
52. **Wang J. H. H.** Generalized Moment Methods in Electromagnetics. – New York : John Wiley & Sons, 1991.
53. **Zeidler E.** Applied Functional Analysis. – Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1997.
54. **Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.** Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М. : Наука, 1986.
55. **Антонов А. В., Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.** Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД технологий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2007. – № 4. – С. 3–12. – (Физико-математические науки).

56. **Бабич В. М., Булдырев В. С.** Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М. : Наука, 1972.
57. **Бейкер Г. Ф.** Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций. – М. : МЦНМО, 2008.
58. **Белянцев А. М., Гапонов А. В.** О волнах с комплексными постоянными распространения в связных линиях передачи без диссипации // Радиотехника и электроника. – 1964. – Т. 9. – № 7. – С. 1188–1197.
59. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** L_2 -теория оператора Максвелла в произвольных областях // Успехи математических наук. – 1987. – Т. 42. – Вып. 6. – С. 61–75.
60. **Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.** Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично-суммируемых по заданной области и операторах векторного анализа // Труды МИАН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 5–36.
61. **Вайникко Г. М., Карма О. О.** О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14. – № 6. – С. 1393–1408.
62. **Вайникко Г. М., Карма О. О.** О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14. – № 4. – С. 828–837.
63. **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. – М. : Радио и связь, 1988.
64. **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** Нелинейная задача на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 10. – С. 70–74.
65. **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 12. – С. 2186–2194.
66. **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2007. – № 3. – С. 35–45. – (Физико-математические науки).
67. **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** Расчет постоянных распространения и полей для поляризованных электромагнитных ТМ-волн в нелинейном анизотропном слое // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54. – № 4. – С. 411–417.

68. **Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.** Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 8. – С. 934–940.
69. **Васильев Е. Н.** Возбуждение тел вращения. – М. : Радио и связь, 1987.
70. **Веселов Г. И., Краснушкин П. Е.** О дисперсионных свойствах экранированного круглого волновода и комплексных волнах в нем // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 260. – № 3. – С. 576–579.
71. **Веселов Г. И., Раевский С. Б.** Слоистые металло-диэлектрические волноводы. – М. : Радио и связь, 1988.
72. **Викулова О. П., Смирнов Ю. Г.** Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле в слое методом объемного сингулярного интегрального уравнения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2005. – № 6. – С. 29–42. – (Естественные науки).
73. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1981.
74. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. – М. : Мир, 1977.
75. **Гвоздев В. И., Хитров С. С.** Линии передачи для интегральных схем СВЧ // Зарубежная радиоэлектроника. – 1982. – № 5. – С. 86–107.
76. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М. : Наука, 1965.
77. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 43–118.
78. **Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.** Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Матем. сб. – 1971. – Т. 84. – № 4. – С. 607–629.
79. **Гринберг Г. А.** Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих плоских экранах, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов. I и II // Журнал теоретической физики. – 1958. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 542–568. – (Серия Б).
80. **Гринберг Г. А., Пименов Ю. В.** К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих экранах // Журнал теоретической физики. – 1957. – Т. 27. – Вып. 10. – С. 2326–2339.

81. Даутов Р. З., Карчевский Е. М. Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40. – № 8. – С. 1250–1263.
82. Делицин А. Л. Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 5.
83. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М. : Изд-во МГУ, 1987.
84. Егоров Ю. В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. – М. : Сов. радио, 1967.
85. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М. : ВИНИТИ, 1988. – Т. 31. – С. 5–125.
86. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. – М. : Изд-во МГУ, 1992.
87. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. Линии передачи сложных сечений. – Ростов-на-Дону : Изд-во Ростовского ун-та, 1983.
88. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн. – М. : Радио и связь, 1982.
89. Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И. Спектральная теория регулярных волноводов. – Л. : Изд-во Физ. тех. ин-та, 1983.
90. Ильин В. А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // Успехи математических наук. – 1968. – Т. 23. – № 2. – С. 61–120.
91. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. – М. : Наука, 1991.
92. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. – М. : Высшая школа, 1991.
93. Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М. : Изд-во МГУ, 1983.
94. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Вариационный метод в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Численные методы решения обратных задач математической физики. – М. : Изд-во МГУ, 1988. – С. 127–137.

95. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М. : ИПРЖР, 1996.
96. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Интегральные уравнения для задач дифракции волн на экранах // Радиотехника и электроника. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 23–31.
97. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Исследование математических моделей микрополосковых линий // Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. – М. : Изд-во МГУ, 1986. – С. 175–198.
98. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Математическое моделирование процесса распространения электромагнитных колебаний в щелевой линии передачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27. – № 2. – С. 252–261.
99. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Численное моделирование щелевых линий передачи // Актуальные вопросы прикладной математики. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – С. 127–138.
100. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Численное моделирование щелевых линий передачи, образованных волноводами различного поперечного сечения // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34. – № 5. – С. 908–916.
101. Ильинский А. С., Чернокожин Е. В., Шестопалов Ю. В. Развитие метода операторных уравнений для решения задачи о собственных волнах связных микрополосковых линий со слоистым диэлектриком подложки // Математические модели прикладной электродинамики. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – С. 116–136.
102. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Математические модели для задачи распространения волн в микрополосковых устройствах // Вычисл. методы и программирование. – М. : Изд-во МГУ, 1980. – Вып. 32. – С. 85–103.
103. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. О спектре нормальных волн щелевой линии передачи // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – № 10. – Р. 2064–2073.
104. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М. : Изд-во МГУ, 1989.
105. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М. : Наука, 1984.
106. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М. : Мир, 1972.

107. **Келдыш М. В.** О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи математических наук. – 1971. – Т. 26. – Вып. 4. – С. 15–41.
108. **Келдыш М. В.** О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 77. – № 1. – С. 11–14.
109. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1981.
110. **Колтон Д., Кресс Р.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М. : Мир, 1987.
111. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды ММО. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
112. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
113. **Костюченко А. Г., Оразов М. Б.** О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного пучка // Функц. анализ и его приложения. – 1975. – Т. 9. – № 4. – С. 28–40.
114. **Краснушкин П. Е., Моисеев Е. И.** О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 264. – № 5. – С. 1123–1127.
115. **Краснушкин П. Е., Федоров Е. Н.** О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах // Радиотехника и электроника. – 1972. – В. 17. – № 6. – С. 1129.
116. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа. – 2 т. – М. : Высшая школа, 1981.
117. **Купрадзе В. Д.** Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. – М. : Гостехиздат, 1951.
118. **Купрадзе В. Д.** Основные задачи математической теории дифракции. – М. : Гостехиздат, 1935.
119. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. – 1 т. – М. : Гостехиздат, 1951.
120. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М. : Наука, 1973.
121. **Левин Л.** Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. – М. : Радио и связь, 1981.
122. **Лидский В. Б.** Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром // Труды ММО. – 1958. – Т. 8. – С. 84–220.
123. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М. : Мир, 1971.

124. **Мазья В. Г.** Пространства С. Л. Соболева. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1985.
125. **Маркус А. С.** Некоторые критерии полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаевом пространстве // Математический сборник – 1966. – Т. 70. – С. 526–561.
126. **Маркус А. С.** О голоморфных оператор-функциях // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 119. – № 6. – С. 1099–1102.
127. **Маркус А.С.** О полноте некоторой части собственных и при соединенных векторов аналитической оператор-функции // Математические исследования. – Кишинев, 1974. – Т. 9. – Вып. 3 (33). – С. 105–126.
128. **Маркус А. С., Мацаев В. И.** К спектральной теории голоморфных оператор-функций в гильбертовом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. – 1975. – V. 9. – Вып. 1. – С. 76–77.
129. **Маркушевич А. И.** Введение в классическую теорию абелевых функций. – М. : Наука, 1979.
130. **Маркушевич А. И.** Теория аналитических функций. – Т. 1, 2. – М. : Наука, 1968.
131. **Марчук Г. И., Агошков В. И.** Введение в проекционно-сеточные методы. – М. : Наука, 1981.
132. **Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.** Применение ГРИД технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
133. **Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 3–19. – (Естественные науки).
134. **Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 4. – С. 441–446.
135. **Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Соболев С. И.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.

136. **Миттра Р., Ли С.** Аналитические методы теории волноводов. – М. : Мир, 1974.
137. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. – М. : Наука, 1983 .
138. **Михлин С. Г.** Сингулярные интегральные уравнения // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3. – № 3. – С. 29–112.
139. **Михлин С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М. : Физматгиз, 1962.
140. **Мищенко А. С.** Векторные расслоения и их применения. – М. : Наука, 1984.
141. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. – М. : Наука, 1968.
142. **Никольский В. В.** Электродинамика и распространение радиоволн. – М. : Наука, 1978.
143. **Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М. : Наука, 1987.
144. **Постников М. М.** Гладкие многообразия. – М. : Наука, 1987.
145. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. – М. : Наука, 1983.
146. **Радзиевский Г. В.** Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи математических наук. – 1982. – Т. 37. – Вып. 2. – С. 81–147.
147. **Радзиевский Г. В.** Кратная полнота корневых векторов пучка М. В. Келдыша, возмущенного аналитической в круге оператор-функцией // Математический сборник – 1973. – Т. 91. – № 3. – С. 310–335.
148. **Радзиевский Г. В.** Кратная полнота собственных и присоединенных векторов некоторых классов оператор-функций, аналитических в круге // Функциональный анализ и его приложения. – 1973. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 84–85.
149. **Ремпель Ш.** Теория индекса эллиптических краевых задач. – М. : Мир, 1986.
150. **Родионова И. А., Смирнов Ю. Г.** О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в слоях, связанных через отверстие // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 20–25. – (Естественные науки).
151. **Родионова И. А., Смирнов Ю. Г.** Сведение векторной электромагнитной задачи дифракции в экранированных слоях, связанных через отверстие, к двум скалярным задачам для уравнения Гельмгольца // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 1. – С. 40–46.

152. **Садовничий В. А.** Теория операторов. – М. : Изд-во МГУ, 1986.
153. **Самарский А. А., Тихонов А. Н.** О возбуждении радиоволноводов. I // Журнал теоретической физики. – 1947. – Т. 17. – № 11. – С. 1283–1296.
154. **Самарский А. А., Тихонов А.Н .** О возбуждении радиоволноводов. II // Журнал теоретической физики. – 1947. – Т. 17. – № 12. – С. 1431–1440.
155. **Самарский А. А., Тихонов А. Н.** О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал теоретической физики. – 1948. – Т. 18. – № 7. – С. 971–985.
156. **Самохин А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. – М. : Радио и связь, 1998.
157. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. – М. : Мир, 1984.
158. **Свешников А. Г.** Принцип излучения // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 73. – № 5. – Р. 917–920.
159. **Славин И. В., Смирнов Ю. Г.** Сильная эллиптичность гибридной формулировки для электромагнитной задачи дифракции // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40. – № 2. – С. 286–299.
160. **Смирнов Ю. Г.** Анализ математических моделей щелевых и полосковых линий передачи с проводником произвольной формы // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т. 35. – № 6. – С. 1333–1335.
161. **Смирнов Ю. Г.** Гибридный метод решения электромагнитной задачи дифракции на системе идеально проводящих и диэлектрических тел // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань : Изд-во Казанского матем. общ-ва, 2002, – Т. 17. – С. 121–139.
162. **Смирнов Ю. Г.** Исследование разрешимости векторных электродинамических задач на незамкнутых поверхностях : дис. докт. физ.-мат. наук. – М., 1995
163. **Смирнов Ю. Г.** Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 1. – С. 140–147.
164. **Смирнов Ю. Г.** Метод псевдодифференциальных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на тонких ограниченных экранах // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2002. – № 1. – С. 17–47. – (Естественные науки).

165. Смирнов Ю. Г. О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 4. – С. 829–832.
166. Смирнов Ю. Г. О разрешимости векторных задач дифракции в областях, связанных через отверстие в экране // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33. – № 9. – С. 1427–1440.
167. Смирнов Ю. Г. О разрешимости векторных интегро-дифференциальных уравнений в задаче дифракции электромагнитного поля на экранах произвольной формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34. – № 10. – С. 1461–1475.
168. Смирнов Ю. Г. О разрешимости векторных электродинамических задач на незамкнутых поверхностях // Дифференциальные уравнения. – 1995. – С. 31. – № 11. – С. 1936–1937.
169. Смирнов Ю. Г. О распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т. 50. – № 2. – С. 196–202.
170. Смирнов Ю. Г. О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и решении уравнения электрического поля // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – № 1. – С. 133–143.
171. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости задачи дифракции на плоском ограниченном идеально проводящем экране // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319. – № 1. – С. 147–149.
172. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы псевдодифференциальных уравнений в задаче дифракции на ограниченном экране // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 1. – С. 136–143.
173. Смирнов Ю. Г. Применение ГРИД технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 39–55.
174. Смирнов Ю. Г. Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 312. – № 3. – С. 597–599.

175. Смирнов Ю. Г. Разрешимость интегродифференциальных уравнений в задаче дифракции на идеально проводящем плоском экране // Радиотехника и электроника. – 1992. – Т. 37. – № 1. – С. 32–35.
176. Смирнов Ю. Г., Куприянова С. Н. Метод интегральных уравнений для неоднородного волновода с нелинейным заполнением по закону Керра // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 4. – С. 3–9.
177. Смирнов Ю. Г., Куприянова С. Н. Распространение электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 10. – С. 1850–1860.
178. Смирнов Ю. Г., Куприянова С. Н. Численный метод в задаче о распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2003. – № 6. – С. 29–42. – (Естественные науки).
179. Смирнов Ю. Г., Сысова Е. В. Решение задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на диэлектрическом слое с нелинейностью некерровского типа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2006. – № 5. – С. 116–121. – (Естественные науки).
180. Смирнов Ю. Г., Хорошева Э. А. Распространение электромагнитных ТМ-волн в круглых диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2006. – № 5. – С. 108–115. – (Естественные науки).
181. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 12. – С. 2264–2279.
182. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Метод Галеркина для решения сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции в резонаторе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2003. – № 2. – С. 31–43. – (Естественные науки).

183. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Существование и единственность решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче дифракции // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 9. – С. 1190–1197.
184. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. – М. : Мир, 1985.
185. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М. : Наука, 1993.
186. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М. : Мир, 1980.
187. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. – М. : Сов. радио, 1962.
188. Фельд Я. Н. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых металлических поверхностях // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20. – № 1. – С. 28–38.
189. Фельд Я. Н. Основы теории щелевых антенн. – М. : Сов. радио, 1948.
190. Хапаев М. М. (мл.) Численное обращение некоторых интегральных операторов первого рода // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 7. – С. 1328–1339.
191. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М. : Мир, 1964.
192. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. – Киев : Наукова думка, 1983.
193. Шестопалов Ю. В. Собственные волны открытых и экранированных щелевых линий, образованных областями произвольного поперечного сечения // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 4. – С. 840–845.
194. Шестопалов Ю. В. Существование дискретного спектра нормальных волн микрополосковых линий передачи со слоистым диэлектрическим заполнением // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 273. – № 3. – С. 594–594.
195. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М. : Наука, 1978.

Научное издание

СМИРНОВ Юрий Геннадьевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

Редактор А. Г. Темникова

Корректор Ю. В. Коломиец

Компьютерная верстка Валовика Д. В.

Подписано в печать 25.05.09. Формат 60×84¹/16.

Усл. печ. л. 15,58.

Заказ № 119. Тираж 100.

Информационно-издательский центр ПГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33